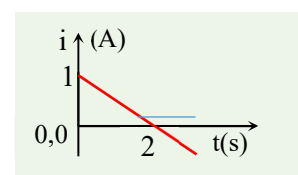
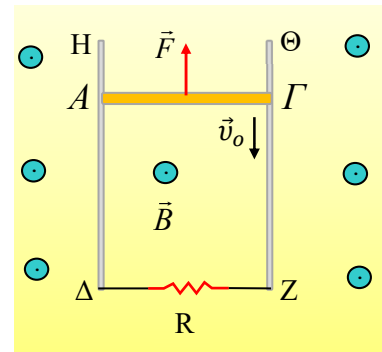


Ένας ακόμη αγωγός κινείται κατακόρυφα

Οι δύο κατακόρυφοι αγωγοί ΗΔ και ΘΖ, χωρίς αντίσταση, απέχουν κατά $d=1\text{m}$ και συνδέονται στα κάτω άκρα τους μέσω αντιστάτη με αντίσταση $R=1,5\Omega$ και είναι στερεωμένοι στο έδαφος, μένοντας ακίνητοι. Σε επαφή με του στύλους αυτούς μπορεί να κινείται, χωρίς τριβές, ένας αγωγός ΑΓ, μάζας $m=0,2\text{kg}$ και μήκους $\ell=1\text{m}$, ενώ στο χώρο υπάρχει ένα οριζόντιο μαγνητικό πεδίο με ένταση κάθετη στο επίπεδο των στύλων, έντασης $B=0,5\text{T}$, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή $t_0=0$, ο αγωγός βρίσκεται στη θέση του σχήματος κινούμενος προς τα κάτω με ταχύτητα $v_0=4\text{m/s}$, ενώ δέχεται μέσω νήματος, μια μεταβλητή κατακόρυφη δύναμη F . Παίρνοντας στη συνέχεια τις τιμές του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΑΓ σε συνάρτηση με το χρόνο, κατασκευάσαμε το διπλανό διάγραμμα.



- Να αποδειχθεί ότι ο αγωγός ΑΓ έχει εσωτερική αντίσταση, την οποία και να υπολογίσετε.
- Υποστηρίζεται ότι καθώς ο αγωγός πέφτει η δυναμική του ενέργεια μειώνεται και ένα μέρος αυτής της μείωσης, εμφανίζεται ως αύξηση της κινητικής ενέργειας του ίδιου του αγωγού. Μπορείτε να κρίνετε αν αυτό είναι σωστό ή λάθος, χωρίς να κάνετε υπολογισμούς;
- Για τη στιγμή t_0 να υπολογιστούν η επιτάχυνση του αγωγού ΑΓ και η τάση του νήματος F .
- Ποια η ταχύτητα του αγωγού για μετατόπιση $\Delta y=y=3\text{m}$; Για την θέση αυτή να βρεθούν:
 - Οι ρυθμοί μεταβολής της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας του αγωγού ΑΓ.
 - Η ισχύς κάθε δύναμης που ασκείται στον αγωγό.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

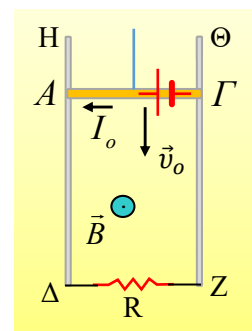
- Τη στιγμή $t=0$, ο αγωγός κινείται μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, οπότε αναπτύσσεται πάνω του μια ΗΕΔ λόγω επαγωγής, με την πολικότητα, όπως στο διπλανό σχήμα και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα με φορά από το Γ στο Α, έντασης:

$$I_o = \frac{E_o}{R_{oi}} \rightarrow R_{oi} = \frac{Bv_o \ell}{I_o} = \frac{0,5 \cdot 4 \cdot 1}{1} \Omega = 2\Omega$$

Αλλά αφού η αντίσταση $R=1,5\Omega$, θα πρέπει ο αγωγός ΑΓ να έχει αντίσταση $r=0,5\Omega$.

- Για μια τυχαία ταχύτητα v του αγωγού, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης:

$$i = \frac{E}{R+r} = \frac{Bv\ell}{R+r}$$



Από την παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό (και το κύκλωμα...) είναι ανάλογη της ταχύτητας του αγωγού. Αλλά τότε με βάση το διάγραμμα $i-t$ που μας δόθηκε, αν μειώνεται η ένταση του ρεύματος με την πτώση του αγωγού, θα μειώνεται και η ταχύτητά του, συνεπώς και η κινητική του ενέργεια. Με άλλα λόγια καθώς κινείται προς τα κάτω ο ΑΓ, μειώνεται η δυναμική του ενέργεια, αλλά μειώνεται και η κινητική του ενέργεια. Η πρόταση είναι λανθασμένη.

- iii) Με βάση την προηγούμενη απάντηση, αφού η ένταση του ρεύματος μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο, την ίδια μορφή θα έχει και το διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, διάγραμμα που παραπέμπει σε ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιβραδυνόμενη) κίνηση. Ας το δούμε αναλυτικά:

$$i = \frac{Bv\ell}{R+r} \rightarrow \Delta i = \frac{B\ell}{R+r} \cdot \Delta v \rightarrow \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{B\ell}{R+r} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1)$$

Αλλά ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος είναι ίσος με την κλίση της ευθείας στο διπλανό διάγραμμα, η οποία παραμένει σταθερή, συνεπώς σταθερή θα παραμένει και η επιτάχυνση με την οποία πέφτει ο αγωγός και η εξίσωση (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta i}{\Delta t} &= \frac{di}{dt} = \frac{B\ell}{R+r} \cdot a \rightarrow a = \frac{R+r}{B\ell} \cdot \frac{di}{dt} = \frac{R+r}{B\ell} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} \\ a &= \frac{1,5+0,5}{0,5 \cdot 1} \cdot \frac{0-1}{2-0} \text{ m/s}^2 = -2 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στον αγωγό ΑΓ, οπότε με θετική την προς τα κάτω φορά, παίρνουμε από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= m\vec{a} \rightarrow mg - F_L - F = ma \rightarrow mg - BI_0\ell - F = ma \rightarrow \\ F &= mg - BI_0\ell - ma = 0,2 \cdot 10 \text{ N} - 0,5 \cdot 1 \cdot 1 \text{ N} - 0,2 \cdot (-2) \text{ N} = 1,9 \text{ N} \end{aligned}$$

- iv) Για την ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση του αγωγού ΑΓ, ισχύουν οι εξισώσεις:

$$v = v_0 + at \quad (2) \quad \Delta y = y = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (3)$$

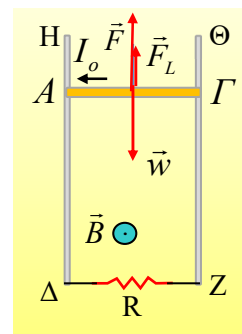
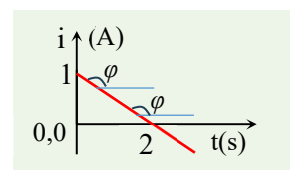
Με αντικατάσταση στην εξίσωση (3) $y=3\text{m}$ παίρνουμε (μονάδες στο S.I.):

$$\begin{aligned} 3 &= 4t + \frac{1}{2}(-2)t^2 \rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \rightarrow \\ t &= \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} \rightarrow t_1 = 1 \text{ s} \quad \text{και} \quad t_2 = 3 \text{ s} \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω τιμών στην εξίσωση της ταχύτητας (2), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + at_1 = 4 \text{ m/s} + (-2) \cdot 1 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s} \quad \text{και} \\ v_2 &= v_0 + at_2 = 4 \text{ m/s} + (-2) \cdot 3 \text{ m/s} = -2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Όπου η πρώτη τιμή είναι κατά την κάθοδο της ράβδου, ενώ η δεύτερη (-2m/s) είναι μετά τον μηδενισμό της ταχύτητας, οπότε ακολουθεί άνοδος με ταχύτητα μέτρου 2m/s. Το διάγραμμα της έντασης του



ρεύματος, μας προετοιμάζει για κίνηση προς τα πάνω, όταν η ένταση του ρεύματος γίνεται αρνητική...

A) για την πρώτη περίπτωση, που η ράβδος κινείται προς τα κάτω, ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα, με φορά όπως στο διπλανό σχήμα, έντασης:

$$I_l = \frac{Bv_l \ell}{R+r} = \frac{0,5 \cdot 2 \cdot 1}{1,5+0,5} A = 0,5 A$$

Οπότε για τα μέτρα των δυνάμεων έχουμε:

$$\begin{aligned} |F_{L,l}| &= F_{L,l} = BI_l \ell = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1 N = 0,25 N \\ \Sigma F = ma &\rightarrow mg - F_{L,l} - F_l = ma \rightarrow F_l = 2 N - 0,25 N + 0,4 N = 2,15 N \end{aligned}$$

α) Για τους ζητούμενους ρυθμούς έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -\frac{dW_w}{dt} = -\frac{mg \cdot dy \cdot \sin 0^\circ}{dt} = -mgv_l \rightarrow \\ \frac{dU}{dt} &= -0,2 \cdot 10 \cdot 2 J/s = -4 J/s \end{aligned}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\omega}}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot dy \cdot \sin 180^\circ}{dt} = -m|a| \cdot v_l = -0,2 \cdot 2 \cdot 2 J/s = -0,8 J/s$$

β) Ενώ για την ισχύ κάθε δύναμης:

$$\begin{aligned} P_w &= +mgv_l = 0,2 \cdot 10 \cdot 2 W = 4 W \\ P_{F_{L,l}} &= -|F_{L,l}| \cdot v_l = -0,25 \cdot 2 W = -0,5 W \\ P_{F_l} &= -|F_l| \cdot v_l = -2,15 \cdot 2 W = -4,3 W \end{aligned}$$

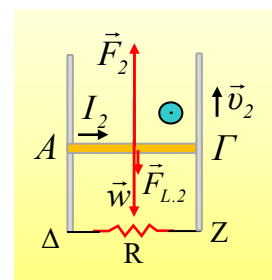
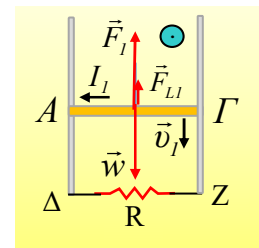
Ας επισημανθούν οι ενεργειακές μετατροπές: Η μηχανική ενέργεια του αγωγού μειώνεται κατά $(4+0,8)J/s$. Από την μείωση αυτή τα $0,5J/s$, μέσω του έργου της δύναμης Laplace μετατρέπονται σε ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα, ενώ τα υπόλοιπα $4,3J/s$ τα αφαιρεί από τον αγωγό το νήμα, μέσω της δύναμης που ασκεί, εδώ της F_l .

B) Στην δεύτερη περίπτωση που η ράβδος κινείται προς τα πάνω, θα έχουμε ίδια κατά απόλυτο τιμή ΗΕΔ, αλλά με αντίθετη πολικότητα, όμοια ένταση ρεύματος $I_2 = -0,5A$, συνεπώς δύναμη Laplace ίδιου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς, όπως στο διπλανό σχήμα. Οπότε για το μέτρο της τάση του νήματος F_2 θα έχουμε (θετική φορά προς τα κάτω, όπως και πριν):

$$\Sigma F = ma \rightarrow mg + F_{L,2} - F_2 = ma \rightarrow F_2 = 2 N + 0,25 N + 0,4 N = 2,65 N$$

α) Για τους ζητούμενους ρυθμούς τώρα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -\frac{dW_w}{dt} = -\frac{mg \cdot dy \cdot \sin 180^\circ}{dt} = mg|v_2| \rightarrow \\ \frac{dU}{dt} &= 0,2 \cdot 10 \cdot 2 J/s = 4 J/s \end{aligned}$$



$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot dy \cdot \sin 0^\circ}{dt} = m|a| \cdot |v_2| = 0,2 \cdot 2 \cdot 2J/s = 0,8J/s$$

β) Ενώ για την ισχύ κάθε δύναμης:

$$P_w = -mg|v_2| = -0,2 \cdot 10 \cdot 2W = -4W$$

$$P_{F_{L,I}} = -|F_{L,I}| \cdot |v_2| = -0,25 \cdot 2W = -0,5W$$

$$P_{F_2} = |F_2| \cdot |v_2| = 2,65 \cdot 2W = 5,3W$$

Τώρα μέσω του νήματος, μεταφέρεται ενέργεια στον αγωγό ΑΓ, ίσο με το έργο της F_2 (5,3J/s), από αυτά τα 0,5J/s τα αφαιρεί η δύναμη Laplace μετατρέποντάς τα σε ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα και τα υπόλοιπα αυξάνουν την μηχανική ενέργεια του αγωγού (τη δυναμική κατά 4J/s και την κινητική κατά 0,8J/s). Το πώς γίνεται το «μοίρασμα» αυτό, το καθορίζει το έργο του βάρους το οποίο συνδέεται με την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας, όπου η αρνητική ισχύς του εδώ, μας δείχνει την αύξηση της δυναμικής ενέργειας...

dmargaris@gmail.com