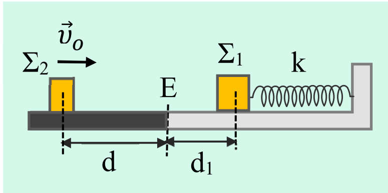
Δύο επίπεδα και μια κρούση στο σύνορο



Ένα σώμα $Σ_1$ μάζας 1kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m, απέχοντας απόσταση d_1=0,4m, από το σημείο Ε, πέρα από το οποίο το ίδιο επίπεδο γίνεται μη λείο. Ένα δεύτερο σώμα $Σ_2$, μάζας 0,5kg ηρεμεί σε απόσταση d=1m από το σημείο Ε, όπως στο σχήμα. Μετακινούμε το $Σ_1$ προς τα δεξιά συμπιέζοντας το ελατήριο κατά Δl=0,5m, ενώ εκτοξεύουμε το σώμα $Σ_2$ με αρχική ταχύτητα $υ_o$=3,5m/s, προς το σώμα $Σ_1$ και στη συνέχεια αφήνουμε ελεύθερο το σώμα $Σ_1$ να κινηθεί. Τα δυο σώματα κινούμενα αντίθετα, στην ίδια διεύθυνση, συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά στο σημείο Ε, τη χρονική στιγμή t_0=0. Μετά την κρούση, το σώμα $Σ_1$ εκτελεί μια αμείωτη ελεύθερη αρμονική ταλάντωση, μια αατ.

i) Να βρεθούν οι ταχύτητες του σώματος $Σ_1$, ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση.

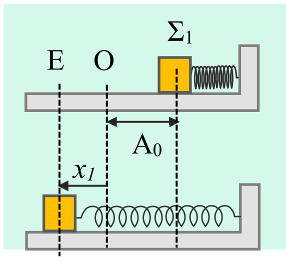
ii) Να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σώματος $Σ_1$ σε συνάρτηση με το χρόνο, μετά την κρούση, θεωρώντας θετική την της τα αριστερά κατεύθυνση (στο σχήμα).

iii) Να υπολογιστεί ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος $Σ_2$ και του επιπέδου.

iv) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,3\pi\ s$.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Το σώμα $Σ_1$ στο άκρο του ελατηρίου θα εκτελέσει μια αατ, μόλις αφεθεί να κινηθεί. Από την διατήρηση της ενέργειας, μεταξύ της αρχικής θέσης και την θέσης Ε, ελάχιστα πριν την κρούση, έχουμε:

$$K_E + U_E = E_\tau \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA_0^2 \Rightarrow$$

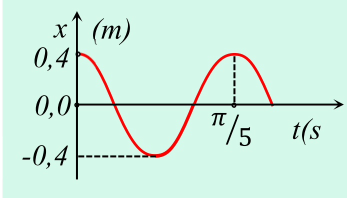
$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}\left(A_0^2 - x_1^2\right)} = \sqrt{\frac{100}{1}\left(0,5^2 - 0,4^2\right)}m/s = 3m/s$$

Και μετά την κρούση, τι; Αν το σώμα $Σ_1$ αποκτήσει ταχύτητα με φορά προς τα αριστερά, θα μπει στο μη λείο επίπεδο, οπότε θα εκτελέσει φθίνουσα ταλάντωση, πράγμα άτοπο. Αν αποκτήσει ταχύτητα προς τα δεξιά, τότε αφού συμπιέσει το ελατήριο, θα επιστρέψει και πάλι θα κινηθεί στο μη λείο επίπεδο, οπότε θα δεχτεί δύναμη τριβής, αλλά τότε και πάλι θα εκτελέσει φθίνουσα ταλάντωση. Αλλά τότε η μόνη περίπτωση που μένει, ώστε η μετέπειτα κίνηση να είναι αατ, είναι το σώμα να έχει μηδενική ταχύτητα, αμέσως μετά την κρούση, έτσι ώστε να συνεχίσει να κινείται στο λείο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να περνά στο μη λείο επίπεδο, αριστερά του σημείου Ε.

ii) Με βάση τα παραπάνω, το σώμα $Σ_1$ μετά την κρούση, ξεκινά μια νέα αατ, ξεκινώντας από την θέση με απομάκρυνση $x_1=+A_1=d_1=+0,4m$ και περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}s = \frac{\pi}{5}s$.

Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι της μορφής:

$$x = A_1 \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$



Η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται στο σχήμα.

iii) Για τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κεντρική και ελαστική κρούση τους έχουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (1)$$

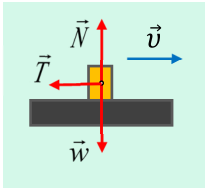
$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (2)$$

Λύνοντας την (1) ως προς υ_2, με θετική την προς τα αριστερά κατεύθυνση και αντικαθιστώντας $\upsilon_1' = 0$ παίρνουμε:

$$\upsilon_2 = -\frac{m_1 - m_2}{2m_2}\upsilon_1 = -\frac{1 - 0,5}{2 \cdot 1} \cdot 3m/s = -1,5m/s$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι το σώμα Σ_2 κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου:

$$\left|\vec{\upsilon}_2\right| = 1,5m/s$$



Παίρνουμε τώρα το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2, πριν την κρούση:

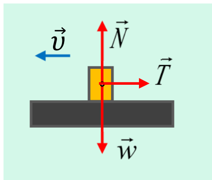
$$K_E - K_{\alpha\rho} = W_w + W_N + W_T \xrightarrow[T=\mu N=\mu mg]{W_w=W_N=0}$$

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_o^2 = -\mu m_2 g d \rightarrow$$

$$\mu = \frac{\upsilon_o^2 - \upsilon_2^2}{2gd} = \frac{3,5^2 - 1,5^2}{2 \cdot 10 \cdot 1} = 0,5$$

iv) Με αντικατάσταση στην (2) βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος Σ_2, μετά την κρούση:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{2 \cdot 1}{1 + 0,5} \cdot 3m/s + \frac{0,5 - 1}{1 + 0,5}(-1,5)m/s = 4,5m/s$$



Μετά την κρούση του Σ_2 κινείται προς τα αριστερά έχοντας επιτάχυνση:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow -T = m_2 a \rightarrow a = -\mu g = -5m/s^2.$$

Εκτελεί λοιπόν ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιβραδυνόμενη) κίνηση για την οποία ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon = \upsilon_2' + \alpha t \quad (3) \quad \Delta x = \upsilon_2' t + \frac{1}{2}at^2 \quad (4)$$

Το ερώτημα είναι: Τη στιγμή $t_1 = 0,3\pi\ s \approx 0,94s$ το σώμα συνεχίζει την κίνησή του ή έχει σταματήσει; Με μηδενισμό της ταχύτητας στην (3) βρίσκουμε τον συνολικό χρόνο κίνησης:

$$\upsilon = \upsilon_2' + \alpha t \xrightarrow{\upsilon=0} t_k = -\frac{\upsilon_2'}{a} = -\frac{4,5}{-5}s = 0,9s$$

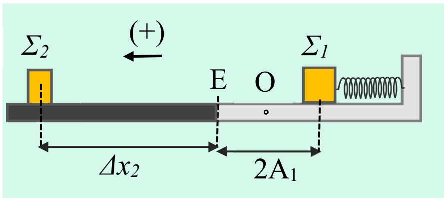
Βλέπουμε δηλαδή ότι το σώμα έχει σταματήσει την στιγμή t_1, σε απόσταση από το σημείο κρούσης Ε, που υπολογίζεται από την εξίσωση (4):

$$\Delta x_2 = \upsilon_2' t_k + \frac{1}{2}at_k^2 = 4,5 \cdot 0,9m + \frac{1}{2}(-5)\cdot 0,9^2 m \approx 2m$$

Το πρώτο σώμα Σ_1 πού βρίσκεται; Με αντικατάσταση στην εξίσωση της απομάκρυνσης παίρνουμε:

$$x_1 = 0,4 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu\left(10 \cdot 0,3\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$x_1 = 0,4 \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -0,4m$$



Αλλά τότε και με βάση το παραπάνω σχήμα, έχουμε για την απόσταση των δύο σωμάτων:

$$D = \Delta x_2 + 2A_1 = 2m + 2 \cdot 0,4m = 2,8m$$

dmargaris@gmail.com