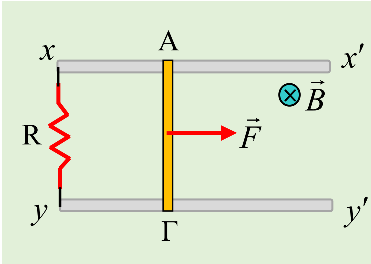
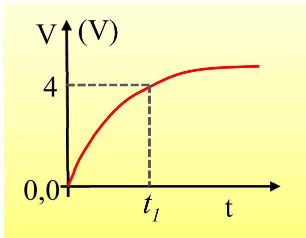
Μετρώντας την τάση και το ρυθμό μεταβολής της



Ο αγωγός ΑΓ έχει, αντίσταση r και ηρεμεί σε επαφή με δύο παράλληλους οριζόντιους στύλους, χωρίς αντίσταση, ενώ στο χώρο υπάρχει ένα κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο, έντασης Β, όπως στο σχήμα (κάτοψη). Τα άκρα x και y των δύο στύλων συνδέονται μέσω ενός αντιστάτη R=r. Σε μια στιγμή t=0 ασκείται στο μέσον του αγωγού ΑΓ μια σταθερή οριζόντια δύναμη F=6N, κάθετη σε αυτόν, με αποτέλεσμα ο αγωγός να επιταχυνθεί προς τα δεξιά. Με την βοήθεια ενός αισθητήρα τάσης, πήραμε το διπλανό διάγραμμα της τάσης στα άκρα του αγωγού ΑΓ σε συνάρτηση με το χρόνο και υπολογίσαμε την αρχική κλίση της καμπύλης 3V/s, καθώς και την κλίση τη στιγμή t_1 η οποία έχει μειωθεί στην τιμή 1V/s.



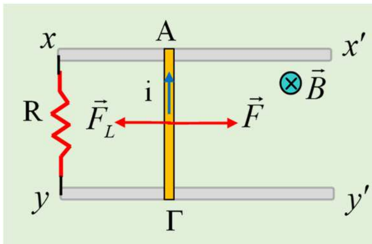
i) Να βρεθεί η ΗΕΔ από επαγωγή στον αγωγό ΑΓ, τη στιγμή t_1.

ii) Να αποδειχθεί ότι η κλίση της καμπύλης $V=f(t)$ είναι ανάλογη της επιτάχυνσης του αγωγού ΑΓ.

iii) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης Laplace, που το μαγνητικό πεδίο ασκεί στον ΑΓ τη στιγμή t_1.

iv) Αν τη στιγμή t_1 πάψει να ασκείται στον αγωγό η δύναμη F, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τάσης στα άκρα του ΑΓ, αμέσως μετά (για $t=t_1^+$).

Απάντηση:



Μόλις ο αγωγός ΑΓ κινηθεί προς τα δεξιά, θα αναπτυχθεί πάνω του μια ΗΕΔ από επαγωγή με θετικό άκρο το άκρο Α ίση με $E = B\upsilon l$, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε ο αγωγός ΑΓ διαρρέεται από ρεύμα με φορά από το Γ στο Α με ένταση:

$$i = \frac{E}{R_{o\lambda}} = \frac{B\upsilon l}{R+r}$$

Αποτέλεσμα είναι στον αγωγό ΑΓ να ασκείται δύναμη Laplace από το μαγνητικό πεδίο αντίθετης κατεύθυνσης από την ασκούμενη δύναμη F, μέτρου $F_L = Bil$.

i) Για την τάση στα άκρα του αγωγού ΑΓ, την τάση $V_{A\Gamma}$, τη στιγμή t_1, ισχύει:

$$V_{A\Gamma} = V_\pi = E - ir = E - \frac{E}{R+r} = E - \frac{E}{r+r}r = \frac{E}{2} \rightarrow$$
$$E_1 = 2V_1 = 8V$$

Όπου E_1 η ΗΕΔ λόγω επαγωγής που αναπτύσσεται στον αγωγό τη στιγμή t_1.

ii) Για την παραπάνω τάση, θα έχουμε:

$$V = E - ir = B\upsilon l - \frac{B\upsilon l}{R+r}r = B\upsilon l - \frac{B\upsilon l}{2r}r = \frac{1}{2}Bl\upsilon$$

Η κλίση της καμπύλης *V=f(t)* που μας δίνεται είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της παραπάνω τάσης, οπότε θα έχουμε:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \left(\frac{1}{2}Bl\upsilon_2\right) - \left(\frac{1}{2}Bl\upsilon_1\right) = \frac{1}{2}Bl(\upsilon_2 - \upsilon_1) = \frac{1}{2}Bl \cdot \Delta\upsilon \rightarrow$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1}{2}Bl \cdot \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}Bl \cdot \frac{d\upsilon}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}Bl \cdot a \quad (1)$$

iii) Από την παραπάνω εξίσωση, για τις χρονικές στιγμές t=0 και t_1, αφού λάβουμε υπόψη ότι

$$F = ma_o \quad \kappa\alpha\iota \quad F\text{-}F_L = ma_1$$

Μιας και ο αγωγός αρχικά είναι ακίνητος και επιταχύνεται μόνο με την επίδραση της δύναμης F, παίρνουμε:

$$\frac{dV_o}{dt} = \frac{1}{2}Bl \cdot a_o = \frac{1}{2}Bl \cdot \frac{F}{m} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{2}Bl \cdot a_1 = \frac{1}{2}Bl \cdot \frac{F - F_L}{m}$$

Με διαίρεση των δύο παραπάνω σχέσεων κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\frac{\frac{dV_o}{dt}}{\frac{dV_1}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}Bl \cdot \frac{F}{m}}{\frac{1}{2}Bl \cdot \frac{F - F_L}{m}} \rightarrow \frac{3}{1} = \frac{F}{F - F_L} \rightarrow 3F - 3F_L = F \rightarrow F_L = \frac{2}{3}F = 4N$$

iv) Μόλις καταργηθεί η δύναμη F, ο αγωγός έχει την ίδια ταχύτητα, διαρρέεται από την ίδια ένταση ρεύματος, απλά επιβραδύνεται πια λόγω της δύναμης Laplace, η οποία τη στιγμή t_o^+ έχει μέτρο 4N. Έτσι από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής, θα πάρουμε:

$$F = ma_o \quad \kappa\alpha\iota \quad \text{-}F_L = ma_{1+} \rightarrow$$

$$\frac{F}{\text{-}F_L} = \frac{ma_o}{ma_{1+}} \rightarrow \frac{6N}{-4N} = \frac{a_o}{a_{1+}} \rightarrow a_{1+} = -\frac{2}{3}a_o$$

Ερχόμαστε τώρα ξανά στην εξίσωση (1) για τις στιγμές t=0 και t_1^+ παίρνοντας:

$$\frac{dV_o}{dt} = \frac{1}{2}Bl \cdot a_o \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{dV_{1+}}{dt} = \frac{1}{2}Bl \cdot a_{1+} \rightarrow$$

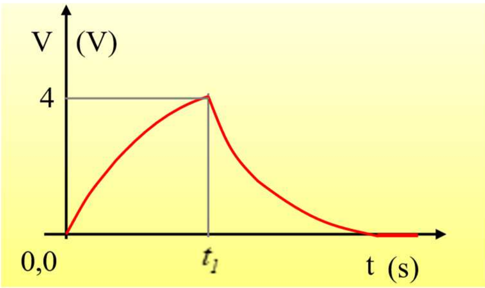
$$\frac{\frac{dV_{1+}}{dt}}{\frac{dV_o}{dt}} = \frac{a_{1+}}{a_o} = \frac{-\frac{2}{3}a_o}{a_o} = -\frac{2}{3} \rightarrow$$

$$\frac{dV_{1+}}{dt} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{dV_o}{dt} = -\frac{2}{3} \cdot 3V/s = -2V/s$$

Σχόλιο:

Μέχρι τη στιγμή t_1 ο αγωγός επιταχύνεται και αυξάνεται η ταχύτητά του, οπότε και ΗΕΔ από επαγωγή και η τάση στα άκρα του. Έτσι η καμπύλη V=f(t) είναι αύξουσα με θετικό ρυθμό μεταβολής της τάσης.

Αν τη στιγμή αυτή πάψει να ασκείται η F, η κίνηση γίνεται επιβραδυνόμενη και η παραπάνω καμπύλη γίνεται φθίνουσα, με αρνητική κλίση, όπως δείχνεται και στο παρακάτω διάγραμμα.



dmargaris@gmail.com