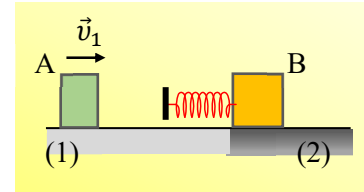


Βρίσκοντας αναλογίες...

Ας δούμε κάποιες εφαρμογές, από διαφορετικά κεφάλαια της ύλης και ας κρατήσουμε κάποια συμπεράσματα...

Εφαρμογή 1^η:

Ένα σώμα Α κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο (1) με ταχύτητα $v_1=0,5\text{m/s}$ κατευθυνόμενο προς ένα σώμα Β το οποίο ηρεμεί σε μη λεία περιοχή (2) του ίδιου οριζώντιου επιπέδου, με την οποία παρουσιάζει συντελεστή οριακής τριβής $\mu_s=0,6$. Το σώμα Β έχει μάζα 2kg ενώ ένα οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k=400\text{N/m}$ έχει προσκολληθεί σε αυτό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το Α σώμα κινούμενο κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου, φτάνει σε αυτό αρχίζοντας να το συμπιέζει. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



- α) Να εξετάσετε αν θα κινηθεί το σώμα Β.
- β) Ποια η τελική ταχύτητα του σώματος Α;
- γ) Θα μπορούσαμε να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα με άμεση κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων, αφαιρώντας το ελατήριο;
- δ) Αν η αρχική ταχύτητα του σώματος Α ήταν 12m/s , να εξετασθεί αν το Β σώμα θα παρέμενε ακίνητο κατά την συσπίρωση του ελατηρίου.

Απάντηση:

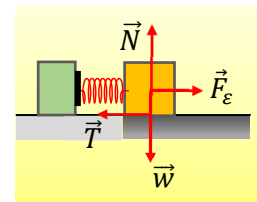
- α) Έστω ότι το σώμα παραμένει ακίνητο μέχρι να σταματήσει η κίνηση του Α, έχοντας προκαλέσει συσπίρωση κατά x του ελατηρίου. Από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα σώμα Α- σώμα Β- ελατήριο, παίρνουμε:

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow$$

$$x = v_1 \sqrt{\frac{m_1}{k}} = 0,5 \cdot \sqrt{\frac{1}{400}} m = \frac{0,5}{20} m = \frac{1}{40} m$$

Ερχόμαστε τώρα στην ισορροπία του Β σώματος, στο οποίο ασκούνται οι δυνάμεις, όπως στο διπλανό σχήμα:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{\varepsilon} - T = 0 \rightarrow T_1 = kx = 400 \cdot \frac{1}{40} \text{N} = 10 \text{N} \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow N = m_2 g = 2 \cdot 10 \text{N} = 20 \text{N} \end{cases}$$



Μπορεί να ασκηθεί στατική τριβή μέτρου 10N στο σώμα Β, ώστε να παραμείνει ακίνητο; Υπολογίζουμε την οριακή τριβή:

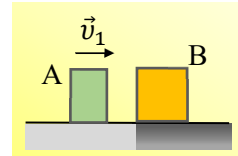
$$T_{\text{ορ}} = T_{s,\text{max}} = \mu_s N = 0,6 \cdot 20 \text{N} = 12 \text{N}$$

Έτσι η απάντηση είναι, ναι, μπορεί να ασκηθεί στο σώμα Β στατική τριβή 10N , οπότε να παραμείνει

ακίνητο, ακόμη και στη θέση μηδενισμού της ταχύτητας του Α σώματος.

β) Αφού το σώμα Α κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και δέχεται την δύναμη του ελατηρίου, αυτή καθορίζει και το είδος της κίνησής του, η οποία δεν είναι παρά μια απλή αρμονική ταλάντωση, με θέση ισορροπίας τη θέση φυσικού μήκους και πλάτος $A=x=1/40\text{m}$. Αλλά τότε το σώμα Α θα βρίσκεται σε επαφή με το ελατήριο για χρόνο $\Delta t=1/2 T$, ενώ στη συνέχεια θα κινηθεί προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $v_1=0,5\text{m}$.

γ) Αν έχουμε μια κρούση, όπως στο σχήμα, όπου το σώμα Β είναι στα όρια της μη λείας περιοχής, τότε αναπτύσσεται τριβή με την επιφάνεια, τότε αυτό μπορεί να παραμείνει ακίνητο στη διάρκεια της κρούσης. Αρκεί η οριακή τριβή να είναι μεγαλύτερη ή ίση με την δύναμη κρούσης. Η κατάσταση δηλαδή θα είναι όμοια με αυτή που μελετήθηκε στο α) ερώτημα. Αν σας φαίνεται απίθανο, σκεφτείτε το σώμα Β να έχει μάζα 50kg . Θα μπορούσε να υπερνικηθεί η τριβή;



δ) Δουλεύοντας όπως στο α) ερώτημα, θεωρώντας ότι το σώμα Β παρέμενε ακίνητο, βρίσκουμε ότι τώρα η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, τη στιγμή μηδενισμού της ταχύτητας του σώματος Α θα ήταν ίση:

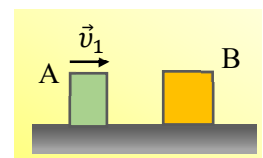
$$x_l = v_1 \sqrt{\frac{m_l}{k}} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{400}} \text{m} = \frac{12}{20} \text{m} = 0,6 \text{m} \rightarrow$$

$$F_{ελ,max} = kx_l = 400 \cdot 0,6 \text{N} = 240 \text{N}$$

Βλέπουμε ότι τώρα πολύ γρήγορα η δύναμη ελατηρίου θα αποκτήσει μέτρο μεγαλύτερο από 12N (το μέτρο της οριακής τριβής) με αποτέλεσμα το σώμα Β να ολισθήσει προς τα δεξιά.

Εφαρμογή 2^η:

Ένα σώμα Α κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_1=12\text{m/s}$ κατευθυνόμενο προς ένα σώμα Β, μάζας 2kg , οπότε ακολουθεί μια κεντρική ελαστική κρούση.



α) Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση.

β) Ποιες οι ταχύτητες αμέσως μετά την κρούση αν τα σώματα παρουσίαζαν με το επίπεδο συντελεστή τριβής $\mu=0,6$, ενώ ελάχιστα πριν την κρούση το σώμα Α είχε ταχύτητα v_1 .

Απάντηση:

α) Μετά την κεντρική ελαστική κρούση τα σώματα αποκτούν ταχύτητες:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{1 - 2}{1 + 2} 12 \text{m/s} = -4 \text{m/s} \quad \text{και}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 1}{1 + 2} 12 \text{m/s} = 8 \text{m/s}$$

β) Θεωρώντας ότι η διάρκεια της κρούσης είναι πάρα πολύ μικρή (συνήθως αναγράφεται ότι η κρούση γίνεται ακαριαία), τότε οι δυνάμεις τριβής που αναπτύσσονται στα δυο σώματα έχουν μέτρο, πολύ -πολύ μικρότερο από τις δυνάμεις μεταξύ των δύο σωμάτων που οφείλονται στην κρούση, οπότε ο ρόλος τους μπορεί να θεωρηθεί ασήμαντος και να θεωρήσουμε το σύστημα μονωμένο. Αλλά μονωμένο σύστημα σημαίνει

ότι ισχύουν ακριβώς τα ίδια που ίσχυαν στο προηγούμενο ερώτημα, οπότε θα έχουμε και τα ίδια αποτελέσματα.

Συμπέρασμα: Ενώ στην πραγματικότητα δεν έχουμε μονωμένο σύστημα, αφού ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα, με συνισταμένη διάφορη του μηδενός (T_1+T_2), αγνοούμε την ύπαρξή τους, θεωρώντας το σύστημα μονωμένο.

Για τις επόμενες εφαρμογές δίνονται $1\text{eV}=1,6\cdot 10^{-19}\text{J}$, $c=3\cdot 10^8\text{m/s}$, $m=9\cdot 10^{-31}\text{kg}$ και $h/mc\approx 10^{-3}\text{nm}$, όπου m η μάζα του ηλεκτρονίου.

Εφαρμογή 3^η:

Μια μεταλλική επιφάνεια φωτίζεται με μονοχρωματικό φως (στο ορατό) με ενέργεια φωτονίου $E_1=3\text{eV}$. Αν το έργο εξαγωγής του υλικού της επιφάνειας είναι $\phi=2\text{eV}$:

- Πόση είναι η ορμή του φωτονίου και πόση ορμή θα αποκτήσει ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο της επιφάνειας μετά την απορρόφηση ενός φωτονίου;
- Πόση είναι η μέγιστη κινητική ενέργεια και η αντίστοιχη ορμή ενός ηλεκτρονίου μετά την έξοδό του από την μεταλλική επιφάνεια;

Απάντηση:

- Η ορμή του φωτονίου είναι ίση:

$$E_1 = p_1 c \rightarrow p_1 = \frac{E_1}{c} = \frac{3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kgm/s}$$

Το ηλεκτρόνιο το οποίο απορροφά το παραπάνω φωτόνιο δεν είναι ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο, ώστε να έχουμε ένα μονωμένο σύστημα για να εφαρμόσουμε την ΑΔΟ και να αποδώσουμε την παραπάνω ορμή στο ηλεκτρόνιο. Έχουμε μια κατάσταση σαν την 1^η εφαρμογή. Εκεί δεν μπορεί να αγνοηθεί η τριβή και να θεωρήσουμε μια κρούση ενός μονωμένου συστήματος, εδώ δεν μπορεί να αγνοηθούν οι δυνάμεις που δέχεται το ηλεκτρόνιο από τα ηλεκτρικά φορτία γύρω του.

- Το ηλεκτρόνιο απορροφώντας το φωτόνιο κερδίζει ενέργεια 3eV , όπου τα 2eV τα καταναλώνει για να εξέλθει από το μέταλλο (το ελάχιστο έργο εξαγωγής...) συνεπώς μόλις βγει από την επιφάνεια θα έχει το πολύ κινητική ενέργεια $K_1 = hf - \phi = 1\text{eV}$. Υποθέτοντας ότι η παραπάνω κινητική ενέργεια αντιστοιχεί σε ταχύτητα πολύ μικρότερη της ταχύτητας του φωτός, δουλεύουμε κλασσικά, οπότε:

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{p_1'^2}{2m} \rightarrow$$

$$p_1' = \sqrt{2mK_1} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ kgm/s}} = 5,4 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$$

(η παραπάνω κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου αντιστοιχεί σε ταχύτητα της τάξης του 10^6m/s , δύο τάξεις μεγέθους μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός).

Εφαρμογή 4^η:

Στην παραπάνω επιφάνεια (εφαρμογή 3^η) προσπίπτουν ακτίνες X με ενέργεια φωτονίου $E_2=60\text{keV}$.

- Ποιο το μήκος κύματος των ακτίνων X και πόση είναι η ορμή ενός φωτονίου;
- Να υπολογιστεί το μέγιστο μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας και ποια η αντίστοιχη ορμή του φωτονίου μετά την σκέδαση;
- Ποια η μέγιστη ορμή που αποκτά το ηλεκτρόνιο και πόση είναι η κινητική του ενέργεια μετά την έξοδό του από την επιφάνεια.

Απάντηση:

- α) Για την ενέργεια ενός φωτονίου των ακτίνων X έχουμε:

$$E_2 = hf_2 = \frac{hc}{\lambda_2} \rightarrow \lambda_2 = \frac{hc}{E_2} = \frac{1.200\text{eV} \cdot \text{nm}}{60.000\text{eV}} = 0,02\text{nm}$$

Η ορμή του προσπίπτοντος φωτονίου είναι ίση:

$$E_2 = p_2c \rightarrow p_2 = \frac{E_2}{c} = \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 3,2 \cdot 10^{-23} \text{ kgm/s}$$

- β) Για την μεταβολή του μήκους κύματος του φωτονίου έχουμε:

$$\lambda'_2 - \lambda_2 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi)$$

Συνεπώς μέγιστη μεταβολή στο μήκος κύματος θα έχουμε όταν $\cos\varphi = -1$, οπότε το σκεδαζόμενο φωτόνιο κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με την ταχύτητα πρόσπτωσης, συνεπώς:

$$\lambda'_2 - \lambda_2 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi) = 10^{-3} \cdot 2\text{nm} \rightarrow \lambda'_2 = \lambda_2 + 0,002\text{nm} = 0,022\text{nm}$$

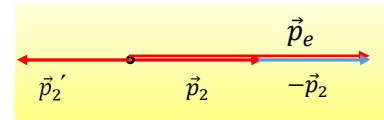
Έτσι η ορμή του σκεδαζόμενου φωτονίου είναι ίση:

$$p'_2 = \frac{h}{\lambda'_2} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}}{0,022 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3 \cdot 10^{-23} \text{ kgm/s}$$

- β) Είναι ελεύθερο ένα ηλεκτρόνιο πάνω στο οποίο σκεδάζεται ένα φωτόνιο; Όχι δεν είναι, όπως δεν ήταν και το αντίστοιχο ηλεκτρόνιο στην περίπτωση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου που είδαμε στην 3η εφαρμογή. Αλλά τώρα το προσπίπτον φωτόνιο έχει τόση μεγάλη ενέργεια που «καταστρέφει» κάθε δεσμό, εκτοξεύοντας το ηλεκτρόνιο. Με άλλα λόγια η κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί το ανάλογο της 2ης εφαρμογής, που ναι μεν υπάρχει τριβή, αλλά στη διάρκεια της κρούσης την θεωρούμε αμελητέα και εφαρμόζουμε ΑΔΟ θεωρώντας το σύστημα μονωμένο. Έτσι και εδώ το ηλεκτρόνιο μπορεί να δέχεται δυνάμεις από τα γύρω φορτισμένα σωματίδια στον κρύσταλλο, αλλά στην διάρκεια της αλληλεπίδρασής του με το φωτόνιο, αυτές οι δυνάμεις μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες, πράγμα που μας επιτρέπει να εφαρμόζουμε για το σύστημα φωτόνιο-ηλεκτρόνιο την αρχή διατήρησης της ορμής. Αλλά τότε με βάση και το παρακάτω

σχήμα, θεωρώντας ότι αρχικά το ηλεκτρόνιο είναι ακίνητο, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\vec{p}_\pi &= \vec{p}_\mu \rightarrow \vec{p}_2 + 0 = \vec{p}'_2 + \vec{p}_e \rightarrow \\ \vec{p}_e &= \vec{p}_2 - \vec{p}'_2 = \vec{p}_2 + (-\vec{p}'_2) \rightarrow \\ p_e &= (3,2 \cdot 10^{-23} + 3 \cdot 10^{-23}) \text{kgm} / \text{s} = 6,2 \cdot 10^{-23} \text{kgm} / \text{s}\end{aligned}$$



με κατεύθυνση ίδια με την αρχική κατεύθυνση διάδοσης του φωτονίου.

Εξάλλου από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει:

$$E_\pi = E_\mu \rightarrow E_2 = E'_2 + K_e \rightarrow K_e = E_2 - E'_2$$

Αλλά:

$$E'_2 = hf'_2 = \frac{hc}{\lambda'_2} = \frac{1,200 \text{eV} \cdot \text{nm}}{0,022 \text{nm}} \approx 54,500 \text{eV}$$

και με αντικατάσταση:

$$K_e = E_2 - E'_2 = 60,000 \text{eV} - 54,500 \text{eV} = 5,500 \text{eV}$$

Αξίζει να επισημανθεί ότι στην τελευταία εφαρμογή για το φαινόμενο Compton θεωρώντας αμελητέες τις αλληλεπιδράσεις του ηλεκτρονίου με άλλα φορτισμένα σωματίδια του υλικού, δεν ασχολούμαστε και με το έργο εξαγωγής. Είναι μια σωστή προσέγγιση αυτή; Αρκεί να συγκρίνουμε την κινητική ενέργεια που αποκτά το ηλεκτρόνιο (5.500eV) με το έργο εξαγωγής (μερικά eV, εδώ 2eV)... Προφανώς δεν υπάρχει κανένας λόγος να μην προσεγγίσουμε την αλληλεπίδραση του φωτονίου με ένα ηλεκτρόνιο, σαν σκέδαση από ένα **ελεύθερο** ηλεκτρόνιο...

Είναι ακριβώς το ίδιο που κάνουμε όταν δεν λαμβάνουμε υπόψη την ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική στη διάρκεια της κρούσης, λόγω τριβής στην 2^η εφαρμογή, οπότε μιλάμε για διατήρηση της μηχανικής ενέργειας στη διάρκεια της ελαστικής κρούσης.

dmargaris@gmail.com