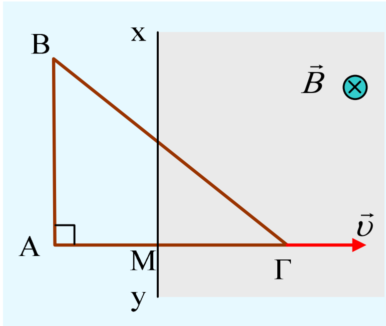
Η επαγωγή σε ένα ορθογώνιο τριγωνικό πλαίσιο



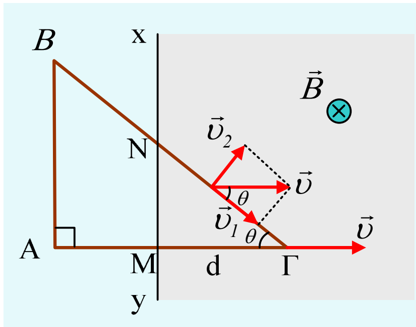
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται ένα ορθογώνιο τριγωνικό αγώγιμο πλαίσιο ΑΒΓ, με κάθετες πλευρές (ΑΒ)=0,3m και (ΑΓ)=0,4m, με αντίσταση R=0,6Ω. Σε μια στιγμή το πλαίσιο εισέρχεται σε ένα κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης Β=0,4Τ, με σταθερή ταχύτητα υ=2m/s και με την πλευρά ΑΓ του πλαισίου κάθετη στην πλευρά xy του μαγνητικού πεδίου, όπως στο σχήμα (σε κάτοψη). Για τη στιγμή, που στο μαγνητικό πεδίο έχει εισέλθει τμήμα (ΓΜ) =0,2m, ζητούνται:

i) Η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται σε κάθε πλευρά του πλαισίου, καθώς και η συνολική ΗΕΔ από επαγωγή στο πλαίσιο.

ii) Η διαφορά δυναμικού στα άκρα κάθε πλευράς του πλαισίου.

iii) Η δύναμη Laplace που δέχεται κάθε πλευρά από το πεδίο, καθώς και το μέτρο της συνισταμένης αυτών των δυνάμεων. Να βρεθεί η ροπή της συνισταμένης αυτής, ως προς την κορυφή Γ του τριγώνου.

Απάντηση:



i) Προφανώς δεν αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή στα τμήματα του πλαισίου που βρίσκονται έξω από το πεδίο. Στο τμήμα ΓΜ της πλευράς ΑΓ του αγωγού δεν αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή, αφού χρησιμοποιώντας τον κανόνα των τριών δακτύλων βρίσκουμε ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια δέχονται δύναμη Lorentz με φορά προς τα κάτω, δηλαδή συσσωρεύονται στο πλαϊνό τοίχωμα και δεν μετακινούνται ούτε προς το Γ, ούτε προς το Μ.

Αλλά στο τμήμα ΓΝ δεν συμβαίνει το ίδιο, αφού αν αναλύσουμε την ταχύτητα σε δυο συνιστώσες, εξαιτίας της $\vec{\upsilon}_1$ η οποία είναι παράλληλη στην πλευρά και πάλι δεν αναπτύσσεται ΗΕΔ στο τμήμα , αλλά εξαιτίας της κάθετη στον αγωγό ταχύτητας $\vec{\upsilon}_2$, τα ηλεκτρόνια δέχονται δύναμη με φορά προς το Γ, οπότε πάνω του αναπτύσσεται μια ΗΕΔ από επαγωγή (με θετικό άκρο το Ν), ίση με:

$$E_{N\Gamma} = B\cdot\upsilon_2\cdot(\Gamma N) = B\cdot\upsilon\cdot(\Gamma N)\cdot\eta\mu\theta = B\cdot\upsilon\cdot(MN) \quad (1)$$

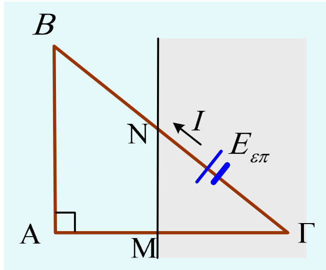
$$\text{Αλλά}\quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{(MN)}{(M\Gamma)} = \frac{(AB)}{(A\Gamma)} = \frac{3}{4} \rightarrow (MN) = \frac{3}{4}(M\Gamma) = \frac{3}{4}0{,}2m = 0{,}15m$$

Και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$E_{N\Gamma} = B\cdot\upsilon\cdot(MN) = 0{,}4\cdot 2\cdot 0{,}15V = 0{,}12V$$

Συμπερασματικά, $E_{AB} = E_{A\Gamma} = 0,\quad E_{B\Gamma} = 0{,}12V = E_{\pi\lambda}$

ii) Από το Π.Θ. βρίσκουμε το μήκος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου:



$$(ΒΓ)=\sqrt{(AB)^2+(AΓ)^2}=\sqrt{0,3^2+0,4^2}\,m=0,5m$$

Συνεπώς το συνολικό μήκος του σύρματος με το οποίο έχουμε κατασκευάσει το πλαίσιο, η περίμετρός του είναι 0,3m+0,4m+0,5m=1,2m, ενώ παρουσιάζει αντίσταση R=0,6Ω. Αλλά αφού η αντίσταση κάθε τμήματος είναι ανάλογη του μήκους του

$$R=\rho\frac{l}{S}=\kappa\cdot l\rightarrow\kappa=\frac{R}{l}=\frac{0,6}{1,2}\,Ω/m=0,5\,Ω/m$$

Θα έχουμε $R_{AB}=\kappa\cdot(AB)=0,5\cdot0,3Ω=0,15Ω...\ R_{AΓ}=0,20Ω,\ R_{BΓ}=0,25Ω.$

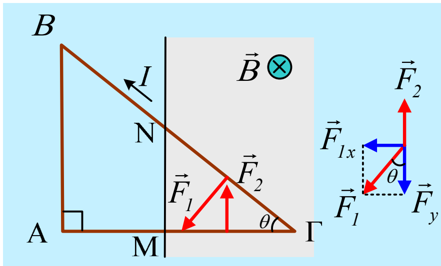
Ενώ το πλαίσιο διαρρέεται από ρεύμα έντασης

$$I=\frac{E_{επ}}{R}=\frac{0,12V}{0,6Ω}=0,2A$$

Οπότε για τις τάσεις στα άκρα κάθε πλευράς θα έχουμε:

$$V_{BA}=IR_{BA}=0,2\cdot0,15V=0,03V$$
$$V_{AΓ}=IR_{AΓ}=0,2\cdot0,2V=0,04V$$
$$V_{BΓ}=E_{επ}-IR_{BΓ}=0,12V-0,2\cdot0,25V=0,07V$$

iii) Τα τμήματα του πλαισίου που βρίσκονται έξω από το πεδίο δεν δέχονται δύναμη Laplace. Στο μέσον της ΝΓ ασκείται η δύναμη F_1, κάθετη στην υποτείνουσα, ενώ στο μέσον της ΜΓ η δύναμη F_2, όπως φαίνονται στο σχήμα. Για τα μέτρα τους έχουμε:



$$F_2=BI(MΓ)=0,4\cdot0,2\cdot0,2N=0,016N$$

$$F_1=BI(NΓ)=BI\cdot\frac{1}{2}(BΓ)=0,4\cdot0,2\cdot\frac{0,5}{2}N=0,02N$$

Αναλύουμε την F_1 σε δυο συνιστώσες, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου η F_{1y} είναι κάθετη στην πλευρά ΑΓ, οπότε σχηματίζει με την F_1 γωνία θ, ίση με την γωνία της κορυφής Γ του τριγώνου, οπότε έχουμε για τη συνισταμένη δύναμη στο πλαίσιο:

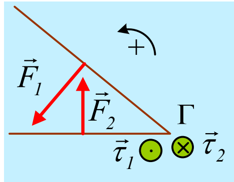
$$ΣF_x=F_{1x}=F_1\cdot ημθ=0,02\cdot\frac{3}{5}N=0,012N$$

$$ΣF_y=F_2-F_{1y}=F_2-F_1\cdot συνθ=0,016N-0,02\cdot\frac{4}{5}N=0\rightarrow$$

$$ΣF=ΣF_x=0,012N$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η συνισταμένη δύναμη έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα εισόδου του πλαισίου στο μαγνητικό πεδίο (αν προτιμάτε αντιτίθεται στην είσοδο του πλαισίου…).

Για την ροπή της συνισταμένης δύναμης Laplace, αρκεί να βρούμε τις ροπές των δύο παραπάνω δυνάμεων, ως προς την κορυφή Γ, οι οποίες είναι διανύσματα κάθετα στο επίπεδο του πλαισίου, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Έτσι θα έχουμε:



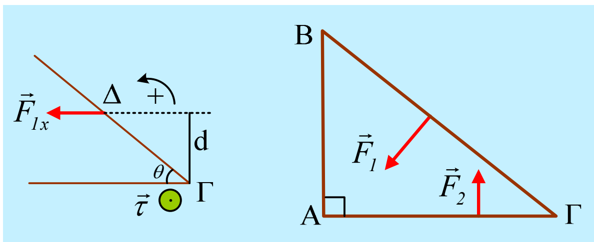
$$\Sigma\tau = \tau_1 - \tau_2 = F_1 \cdot \frac{(N\Gamma)}{2} - F_2 \cdot \frac{(M\Gamma)}{2} = 0{,}02 \cdot \frac{0{,}25}{2} Nm - 0{,}016 \cdot \frac{0{,}2}{2} Nm = 9 \cdot 10^{-4}\, Nm$$

Σχόλιο:

Κάποιος στο τελευταίο ερώτημα θα έκανε την εξής σκέψη.

Αφού βρήκαμε τη συνισταμένη και αυτή είναι στην διεύθυνση x, γιατί να μην υπολογίσουμε την ροπή της παίρνοντας την εξίσωση $\Sigma\tau = \tau_1 - \tau_2 = \Sigma F \cdot d = ... = 9 \cdot 10^{-4}\, Nm$, αφού βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα; (όπου d ο μοχλοβραχίονας της συνισταμένης ίσος με $d = (\Delta\Gamma) \cdot \eta\mu\theta$, όπως φαίνεται στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα).

Για να διαπιστώσει αν αυτός είναι ένας σωστός τρόπος εύρεσης της συνολικής ροπής, ας σκεφτεί ότι δίνεται μια άσκηση στερεού, όπου σε ένα τρίγωνο ασκούνται οι δυνάμεις όπως στο δεύτερο σχήμα. Θα ήταν σωστή η μέθοδος;



dmargaris@gmail.com