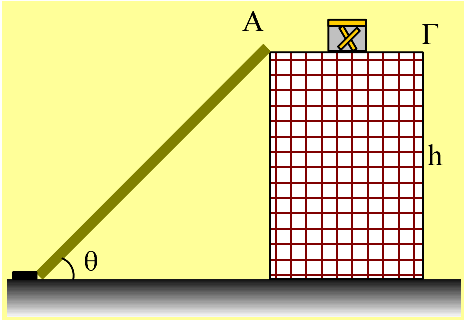
Κατεβάζοντας ένα κιβώτιο με μπάζα



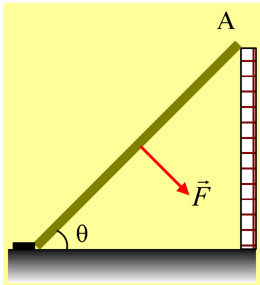
Στην ταράτσα ενός σπιτιού με ύψος h=3,2m έχουμε ένα κιβώτιο μάζας 10kg. Μπορούμε να το αφήσουμε να πέσει ελεύθερα, από την πλευρά Γ του οικήματος και να φτάσει στο έδαφος.

i) Με ποια ταχύτητα το κιβώτιο φτάνει στο έδαφος;

Εναλλακτικά, μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα κεκλιμένο επίπεδο, με την χρήση μιας λείας σανίδας, η οποία σχηματίζει γωνία θ με το έδαφος, από την αριστερή πλευρά, όπως στο σχήμα.

ii) Ένας μαθητής υποστηρίζει ότι αν το κιβώτιο αφεθεί να κινηθεί κατά μήκος της σανίδας θα φτάσει με μικρότερη ταχύτητα στο έδαφος, αφού θα κινηθεί με μικρότερη επιτάχυνση. Να εξετάσετε αν είναι σωστή η θέση αυτή.

iii) Αν μέσα στο κιβώτιο τοποθετήσουμε μπάζα, με αποτέλεσμα να βαρύνει, μήπως φτάσει πιο σύντομα στο έδαφος, αν κινηθεί κατά μήκος της σανίδας;



iv) Η σανίδα αντέχει αν δεχτεί κάθετη δύναμη στο μέσον της, με μέτρο μέχρι F=300N (με άσκηση μεγαλύτερη δύναμης η σανίδα σπάει). Πόση είναι η μέγιστη μάζα των μπάζων που μπορούμε να τοποθετήσουμε στο κιβώτιο, ώστε όταν κινηθεί κατά μήκος της σανίδας, να μην υπάρχει κίνδυνος αυτή να σπάσει;

Δίνεται $g=10m/s^2$, ενώ για την γωνία θ που σχηματίζει η σανίδα με το έδαφος ημθ=0,6 και συνθ=0,8.

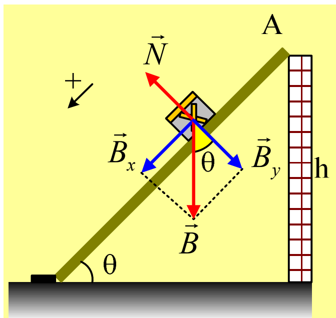
Απάντηση:

i) Αν το κιβώτιο εκτελέσει ελεύθερη πτώση, κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε θεωρώντας την προς τα κάτω κατεύθυνση θετική, θα ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon = gt \quad (1) \quad \kappa\alpha\iota \quad \Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

Με απαλοιφή του χρόνου μεταξύ των παραπάνω εξισώσεων παίρνουμε:

$$\upsilon = gt \rightarrow t = \frac{\upsilon}{g} \xrightarrow{(2)} \Delta y = \frac{1}{2}g\left(\frac{\upsilon}{g}\right)^2 \xrightarrow{\Delta y = h}$$
$$\upsilon = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 3,2}m/s = 8m/s$$



ii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο σε μια τυχαία θέση, κατά την κίνησή του κατά μήκος στη σανίδα. Αναλύουμε το βάρος σε δυο συνιστώσες, μια κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο B_y, η οποία σχηματίζει με το βάρος γωνία θ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές) και την B_x παράλληλη με το επίπεδο. Για τις συνιστώσες αυτές έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{B_x}{B} \rightarrow B_x = mg\cdot\eta\mu\theta \quad (3) \quad \kappa\alpha\iota \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{B_y}{B} \rightarrow B_y = mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \quad (4)$$

Το σώμα ισορροπεί στην κάθετη στο επίπεδο, από όπου προκύπτει $N=B_y=mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$, ενώ στην διεύθυνση x, την παράλληλη στο επίπεδο ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$\Sigma F_x = ma \rightarrow B_x = ma \rightarrow mg\cdot\eta\mu\theta = ma \rightarrow a = g\cdot\eta\mu\theta \ (5)$$

Συνεπώς το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, για την οποία, με θετική την προς τα κάτω κατεύθυνση, ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon = \alpha t \quad \kappa\alpha\iota \quad \Delta x = \frac{1}{2}at^2 \xrightarrow{Dx=l} \xrightarrow[\Delta x=l]{\alpha\pi\alpha\lambda o\iota\varphi\acute{\eta}\tau} l = \frac{\upsilon_1^2}{2\alpha} \rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2\alpha l} \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g\cdot\eta\mu\theta\cdot l} \quad (6)$$

Όμως $\eta\mu\theta = \frac{h}{l} \rightarrow l\cdot\eta\mu\theta = h$ και η τελευταία σχέση (6) γίνεται:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g\cdot\eta\mu\theta\cdot l} = \sqrt{2gh} = \upsilon = 8m/s$$

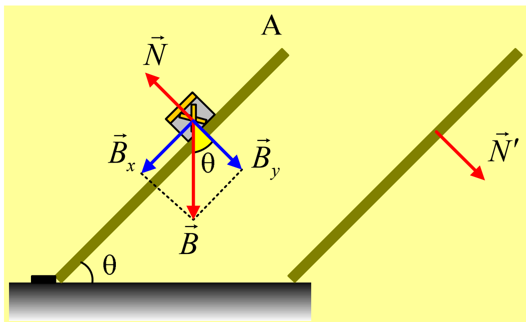
Ο μαθητής κάνει λάθος! Αν και το κιβώτιο αποκτά μικρότερη επιτάχυνση (α=g·ημθ=0,6g), στο τέλος φτάνει με την ίδια ταχύτητα, αφού αυξάνεται το μήκος της διαδρομής και συνεπώς ο χρόνος κίνησης.

iii) Από την παραπάνω εξίσωση (5) προκύπτει ότι η επιτάχυνση (όπως και στην ελεύθερη πτώση) δεν εξαρτάται από την μάζα του σώματος. Συνεπώς και όταν το κιβώτιο το γεμίσουμε μπάζα, με την ίδια επιτάχυνση θα κινηθεί (α=g·ημθ) και θα χρειαστεί τον ίδιο χρόνο για να μετατοπισθεί κατά l.

iv) Αν M είναι η μάζα των μπάζων, τότε από την ισορροπία στην κάθετη προς την σανίδα διεύθυνση, παίρνουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = (M+m)g\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

Αλλά τότε το κιβώτιο ασκεί στη σανίδα της αντίδραση της κάθετης αντίδρασης N, την N΄ ίδιου μέτρου.



Για να μην σπάσει η σανίδα, θα πρέπει:

$$N' < 300N \xrightarrow{(S.I.)} (M+m)g\cdot\sigma\upsilon\nu\theta < 300 \rightarrow (M+m)\cdot 10\cdot 0{,}8 < 300 \rightarrow$$

$$M < \frac{300}{8} - m \rightarrow M < 37{,}5 - 10 \rightarrow$$

$$M < 27{,}5kg$$

Για να μην σπάσει η σανίδα, θα πρέπει να φροντίζουμε η μάζα των μπάζων να είναι πάντα μικρότερη των 27,5kg.

dmargaris@gmail.com