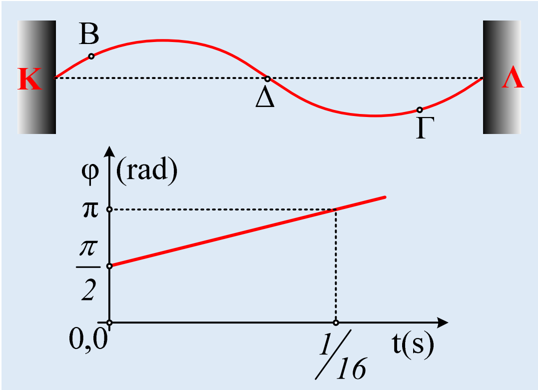
Μελετώντας ένα στάσιμο κύμα



Πάνω σε μια ελαστική χορδή με σταθερά τα δυο της άκρα Κ και Λ, έχει σχηματισθεί ένα στάσιμο κύμα και τη στιγμή $t_0=0$ η μορφή της είναι αυτή του σχήματος, όπου το σημείο Β, το οποίο απέχει οριζόντια απόσταση 0,25m από το άκρο Κ έχει απομάκρυνση $y_B=0{,}2m$ (τα θετικά προς τα πάνω) και μηδενική ταχύτητα ταλάντωσης. Στο διάγραμμα δίνεται η φάση της απομάκρυνσης του σημείου Β, σε συνάρτηση με το χρόνο. Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης ενός τρέχοντος κύματος κατά μήκος της χορδής αυτής είναι υ=12m/s, ενώ ένα σημείο Ο μεταξύ Κ και Δ, απέχει οριζόντια 0,75m από το Κ.

i) Να υπολογιστεί το μήκος (ΚΛ) της χορδής, τη στιγμή που όλα τα σημεία της περνούν από τη θέση ισορροπίας τους.

ii) Να γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση της φάσης *φ=f(t)* για τα σημεία Ο και Γ.

iii) Για να μπορέσουμε να γράψουμε την εξίσωση του στάσιμου κύματος, θεωρούμε ως αρχή του άξονα x τη θέση του σημείου Ο, με την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική.

α) Να βρεθεί το μέγιστο πλάτος του στάσιμου κύματος.

β) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

Απάντηση:

i) Η εξίσωση της φάσης της απομάκρυνσης του σημείου Β έχει την μορφή:

$$\varphi = \omega t + \varphi_o$$

Αλλά για t=0, η φάση έχει την τιμή $\varphi_o=\pi/2$ (rad), ενώ για $t_1=1/16$ s, φ= π, οπότε από την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε:

$$\omega = \frac{\varphi-\varphi_o}{t_1} = \frac{\pi - \pi/2}{1/16} rad/s = 8\pi\ rad/s \rightarrow$$

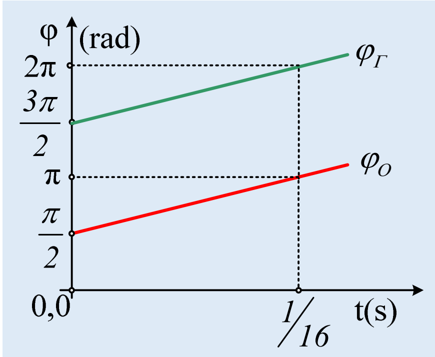
$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{8\pi}{2\pi} Hz = 4Hz \ \ ή\ T=0{,}25s$$

Αλλά τότε για την ταχύτητα διάδοσης ενός τρέχοντος εγκάρσιου κύματος, κατά μήκος της χορδής, θα έχουμε:

$$\upsilon_\kappa = \lambda f \rightarrow \lambda = \frac{\upsilon_\kappa}{f} = \frac{12}{4} m = 3m$$

Αλλά με βάση το παραπάνω στιγμιότυπου το μήκος της χορδής είναι ίσο με ένα μήκος κύματος του τρέχοντος κύματος, συνεπώς l=3m.

ii) Τα σημεία Κ, Δ και Λ της χορδής αντιστοιχούν σε δεσμούς του στάσιμου κύματος. Όμως όλα τα σημεία μεταξύ δύο δεσμών ταλαντώνονται με την ίδια φάση, ενώ δύο σημεία εναλλάξ ενός δεσμού παρουσιάζουν διαφορά φάσης ίση με π (rad). Συνεπώς το σημείο Ο έχει την ίδια φάση με το σημείο Β, ενώ το σημείο Γ θα έχει μεγαλύτερη φάση κατά π:

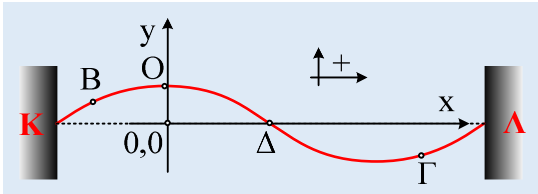


$$\varphi_O = \omega t + \varphi_o = 8\pi t + \frac{\pi}{2} \quad (S.I.) \quad \kappa\alpha\iota$$

$$\varphi_\Gamma = \omega t + \varphi_{o,\Gamma} = 8\pi t + \frac{\pi}{2} + \pi = 8\pi t + \frac{3\pi}{2} \quad (S.I.)$$

Με αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις αυτές του διπλανού σχήματος.

iii) Αφού το μήκος κύματος λ=3m, η οριζόντια απόσταση (ΚΟ)=0,75m, είναι ίση με λ/4, δηλαδή στο Ο έχουμε την πρώτη κοιλία του στάσιμου κύματος, όπως στο σχήμα.



α) Αν Α το πλάτος του στάσιμου κύματος, με δεδομένο ότι η αρχή του άξονα x συμπίπτει με κοιλία του στάσιμου κύματος, αυτό θα ικανοποιεί την εξίσωση:

$$A = \left| A_O \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) \right|$$

Όπου A_O το πλάτος μιας κοιλίας, το οποίο είναι και το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης των σημείων της χορδής. Αλλά τη στιγμή t_0, όλα τα σημεία βρίσκονται σε θέσεις πλάτους, οπότε παίρνοντας το σημείο Β, όπου με βάση τη θέση του άξονα, βρίσκεται στη θέση x=-(0,75m-0,25m)=-0,5m, θα έχουμε με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση:

$$0,2 = A_O \left| \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{-0,5}{3}\right) \right| \rightarrow A_O = \frac{0,2}{\left|\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right|} m = \frac{0,2}{1/2} m = 0,4m$$

β) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Ο, στη θέση x=0, θα είναι της μορφής:

$$y_O = A_O \eta\mu\left(\omega t + \varphi_o\right) = 0,4\eta\mu\left(8\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Αλλά τότε λαμβάνοντας ότι στη θέση x=0 έχουμε κοιλία, θα ισχύει η εξίσωση του βιβλίου μας και η εξίσωση του στάσιμου θα παίρνει τελικά την μορφή:

$$y = A_O \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(8\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

dmargaris@gmail.com