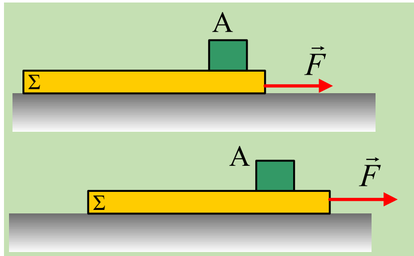
Η κίνηση ενός συστήματος και η ορμή

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια σανίδα μάζας M=3kg, πάνω στην οποία ηρεμεί ένα σώμα Α μάζας m=2kg. Σε μια στιγμή $t_0=0$, στη σανίδα ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, μέτρου F=6N, όπως στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι το σώμα Α αρχίζει να γλιστράει πάνω στη σανίδα, ενώ κινείται και αυτό προς τα δεξιά.



i) Να εξηγήσετε, πώς μπορεί να επιταχύνεται προς τα δεξιά το σώμα Α.

ii) Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος (σώμα Α-σανίδα), καθώς και η ολική ορμή του συστήματος τη χρονική στιγμή $t_1=3s$.

iii) Αν τη στιγμή t_1 το σώμα Α έχει ταχύτητα $υ_1=3m/s$, να βρεθούν για τη στιγμή αυτή:

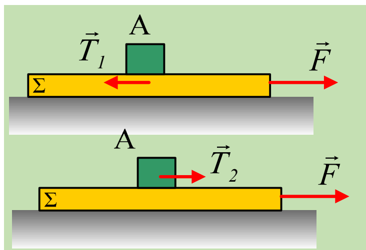
α) Η ταχύτητα της σανίδας.

β) Το μέτρο της τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ σώματος Α και σανίδας.

iv) Τη στιγμή t_1 παύει να ασκείται στη σανίδα η δύναμη $\vec{F}$ με αποτέλεσμα μετά από λίγο το σώμα Α να αποκτά την ίδια ταχύτητα με τη σανίδα, ενώ συνεχίζει να βρίσκεται πάνω της. Να υπολογιστεί η κοινή αυτή ταχύτητα των δύο σωμάτων.

Απάντηση:

Τα δυο σώματα ισορροπούν στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε παρακάτω περιοριζόμαστε στις οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα και οι οποίες είναι υπεύθυνες για την κίνησή τους.



i) Μόλις στην σανίδα ασκηθεί η δύναμη $\vec{F}$, αυτή τείνει να επιταχυνθεί προς τα δεξιά, οπότε δέχεται από το σώμα Α, δύναμη τριβής ολίσθησης $\vec{T}_1$, αντίθετης κατεύθυνσης, από την δύναμη $\vec{F}$. Η αντίδρασή της $\vec{T}_2$, έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα, ασκείται στο σώμα Α και είναι υπεύθυνη για την επιτάχυνση του σώματος Α.

ii) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, για κάθε σώμα ξεχωριστά, έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_A = \frac{\Delta\vec{p}_A}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta\vec{p}_A}{\Delta t} = \vec{T}_2$$

$$\Sigma\vec{F}_\Sigma = \frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta\vec{p}_\Sigma}{\Delta t} = \vec{F} + \vec{T}_1$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο παραπάνω εξισώσεων, παίρνουμε:

$$\frac{\Delta\vec{p}_A}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{p}_\Sigma}{\Delta t} = \vec{T}_2 + \vec{F} + \vec{T}_1$$

Αλλά το πρώτο μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος, ενώ $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$ (δράση-αντίδραση), οπότε τελικά:

$$\frac{\Delta \vec{p}_{ολ}}{\Delta t} = \vec{F} \rightarrow \frac{dp_{ολ}}{dt} = 6kg \cdot m / s^2 .$$

Αφού η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή, άρα ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής, θα είναι ίσος και με το στιγμιαίο ρυθμό τη στιγμή t_1. Εξάλλου παρατηρούμε ότι και για το σύστημα των δύο σωμάτων ισχύει ο γενικευμένος νόμος, παίρνοντας όμως τις **εξωτερικές** δυνάμεις μόνο (εδώ τη δύναμη $\vec{F}$) .

Αλλά αφού έχουμε σταθερό ρυθμό μεταβολής της ορμής η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\frac{\Delta p_{ολ}}{\Delta t} = F \rightarrow \frac{p_{ολ,1} - 0}{t_1} = F \rightarrow p_{ολ,1} = Ft_1 = 6 \cdot 3kg \cdot m / s = 18kg \cdot m / s.$$

iii) α) Για την ολική ορμή του συστήματος, τη στιγμή t_1 ισχύει:

$$\vec{p}_A + \vec{p}_\Sigma = \vec{p}_{ολ} \rightarrow$$

$$m\upsilon_1 + M \cdot u_1 = p_{ολ,1} \rightarrow$$

οπότε λύνοντας ως προς u_1 παίρνουμε:

$$u_1 = \frac{p_{ολ,1} - m\upsilon_1}{M} = \frac{18 - 2 \cdot 3}{3} m / s = 4m / s$$

β) Εφαρμόζοντας το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα Α, παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt} = \frac{\Delta \vec{p}_A}{\Delta t} = \vec{T}_2 \rightarrow T_2 = \frac{\Delta p_A}{dt} = \frac{m\upsilon_1}{t_1 - 0} = \frac{2 \cdot 3}{3} N = 2N.$$

Προφανώς λόγω δράσης αντίδρασης και το μέτρο της T_1 που ασκείται στη σανίδα είναι επίσης T_1=2N.

iv) Για όσο χρόνο το σώμα Α έχει μικρότερη ταχύτητα από τη σανίδα θα δέχεται δύναμη τριβής ολίσθησης, εξαιτίας της οποίας θα επιταχύνεται. Ταυτόχρονα η τριβή $\vec{T}_1$ θα επιβραδύνει τη σανίδα. Θα έρθει λοιπόν κάποια στιγμή που τα δυο σώματα θα αποκτήσουν την ίδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\kappa$, οπότε τη στιγμή αυτή επειδή δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των σωμάτων η τριβή μηδενίζεται και έτσι, τα σώματα κινούνται πια μαζί με σταθερή ταχύτητα. Μόλις όμως πάψει να ασκείται στη σανίδα η εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ το σύστημα των σωμάτων είναι μονωμένο, οπότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα, από τη στιγμή t_1 μέχρι τη στιγμή που το σώμα Α σταματά να ολισθαίνει πάνω στη σανίδα, αποκτώντας την ίδια ταχύτητα με αυτήν, παίρνουμε:

$$\vec{p}_{ολ,1} = \vec{p}_{ολ,\kappa} \rightarrow m\upsilon_1 + Mu_1 = (m + M)\upsilon_\kappa \rightarrow$$

$$\upsilon_\kappa = \frac{m\upsilon_1 + Mu_1}{m + M} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4}{2 + 3} m / s = 3,6m / s.$$

dmargaris@gmail.com