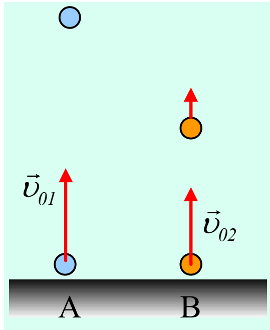
Δύο κατακόρυφες βολές



Από ένα σημείο Α στο έδαφος, εκτοξεύεται κατακόρυφα τη χρονική στιγμή $t_0=0$ ένα βλήμα με αρχική ταχύτητα $\upsilon_{01}=40m/s$. Τη στιγμή t΄=2s, από ένα άλλο σημείο Β του εδάφους, όπου η απόσταση (ΑΒ)=20m εκτοξεύεται ένα δεύτερο βλήμα με κατακόρυφη ταχύτητα $\upsilon_{02}=35m/s$.

i) Ποια χρονική στιγμή t_1 το πρώτο βλήμα φτάνει στο μέγιστο ύψος; Να υπολογιστεί το ύψος αυτό.

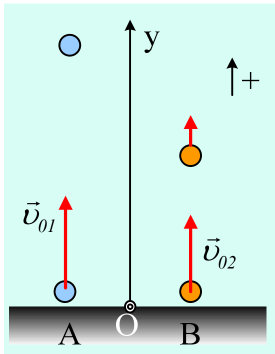
ii) Ποια η ταχύτητα και ποια η θέση του δεύτερου βλήματος τη στιγμή t_1;

iii) Ποιο βλήμα θα επιστρέψει πρώτο στο έδαφος;

iv) Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο βλημάτων και η απόσταση μεταξύ τους τη χρονική στιγμή $t_2=6s$.

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα, ενώ $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



Παίρνοντας έναν κατακόρυφο άξονα με αρχή το σημείο Ο στο έδαφος και θετική φορά προς τα πάνω, τότε τα βλήματα θα κινηθούν με επιτάχυνση α=-g οπότε για κάθε βλήμα, θα ισχύουν οι εξισώσεις για ταχύτητα και θέση:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t = \upsilon_0 - gt \quad (1) \quad \text{και}$$

$$y = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

i) Για το πρώτο βλήμα, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1) υ=0, βρίσκουμε τη χρονική στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητά του, άρα σταματά η κίνηση προς τα πάνω και το βλήμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος $h_{1,max}$.

$$\upsilon = \upsilon_{01} - gt_1 \rightarrow 0 = 40 - 10t_1 \rightarrow t_1 = 4s$$

Και με αντικατάσταση στην εξίσωση (2) βρίσκουμε:

$$y = h_{1,max} = \upsilon_{01}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 40 \cdot 4m - \frac{1}{2}10 \cdot 4^2 m = 80m$$

ii) Οι εξισώσεις (1) και (2) περιγράφουν επίσης την κίνηση του δεύτερου βλήματος, με τη διαφορά ότι, όπου t (η χρονική στιγμή) θα πρέπει να αντικαταστήσουμε με το χρονικό διάστημα κίνησης Δt, όπου Δt-t-t΄. Έτσι την στιγμή t_1 θα έχουμε για το δεύτερο βλήμα αφού $\Delta t = t_1 - t' = 4s - 2s = 2s$:

$$\upsilon_{B,1} = \upsilon_{02} - g\Delta t = 35m/s - 10 \cdot 2m/s = 15m/s \quad \text{και}$$

$$y_{B,1} = \upsilon_{02}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \xrightarrow{\Delta t = 2s} y_{B,1} = 35 \cdot 2m - \frac{1}{2}10 \cdot 2^2 m = 50m$$

iii) Κάθε βλήμα επιστρέφει στο έδαφος κάποια στιγμή όπου η θέση του γίνεται y=0. Αλλά τότε από την εξίσωση (2), θέτοντας y=0, θα πάρουμε:

$$y_1 = \upsilon_{01} t - \frac{1}{2} g t^2 \ \rightarrow 0 = 40 t_{1,o\lambda} - \frac{1}{2} 10 \cdot t_{1,o\lambda}^2 \rightarrow t_{1,o\lambda} = 0 \ \ ή \ t_{1,o\lambda} = 8s$$

Η λύση t=0 αντιστοιχεί στην στιγμή της εκτόξευσης, συνεπώς το πρώτο βλήμα επιστρέφει στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_{1,o\lambda} = 8s$. Όμοια για το δεύτερο βλήμα:

$$y_2 = \upsilon_{02} \Delta t - \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \ \rightarrow 0 = 35 \Delta t_{2,o\lambda} - \frac{1}{2} 10 \cdot (\Delta t)_{2,o\lambda}^2 \rightarrow \Delta t_{2,o\lambda} = 0 \ \ ή \ \Delta t_{2,o\lambda} = 7s$$

Απορρίπτουμε ξανά την πρώτη λύση, οπότε:

$$\Delta t_{2,o\lambda} = t_{2,o\lambda} - t' = 7s \rightarrow t_{2,o\lambda} = 7s + 2s = 9s$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο βλήμα φτάνει πρώτο στο έδαφος αφού 8s < 9s.

iv) Τη χρονική στιγμή t_2=6s, η ταχύτητα και η θέση του πρώτου βλήματος είναι:

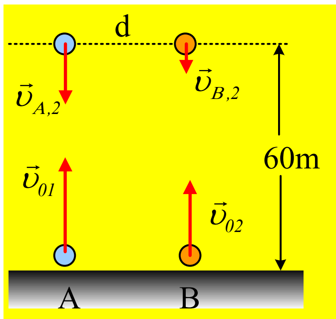
$$\upsilon_{A,2} = \upsilon_{02} - g t_2 = 40m/s - 10 \cdot 6m/s = -20m/s$$

$$y_{A,2} = \upsilon_{01} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \ = 40 \cdot 6m - \frac{1}{2} 10 \cdot 6^2 m = 60m$$

Ενώ για το δεύτερο βλήμα, όπου Δt_2 =6s-2s=4s, θα έχουμε:

$$\upsilon_{B,2} = \upsilon_{02} - g \Delta t_2 = 35m/s - 10 \cdot 4m/s = -5m/s$$

$$y_{B,2} = \upsilon_{02} \Delta t_2 - \frac{1}{2} g (\Delta t_2)^2 = 35 \cdot 4m - \frac{1}{2} 10 \cdot 4^2 m = 60m$$



Στο σχήμα βλέπουμε τις θέσεις και τις ταχύτητες των δύο βλημάτων τη στιγμή t_2=6s. Τα βλήματα βρίσκονται στο ίδιο ύψος h=60m, οπότε απλά απέχουν οριζόντια απόσταση d=(AB)=20m, ενώ κινούνται και τα δυο προς τα κάτω.

dmargaris@gmail.com