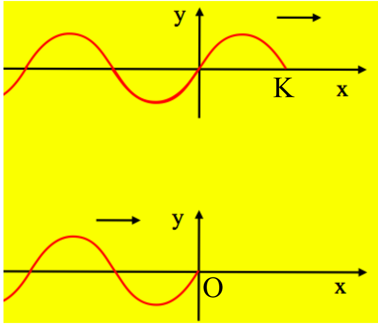
Δυο εξισώσεις δύο αρμονικών κυμάτων



Κατά μήκος δύο γραμμικών ελαστικών μέσων και από αριστερά προς τα δεξιά (θετική κατεύθυνση) διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος Α και την ίδια ταχύτητα διάδοσης u. Τη στιγμή $t_0=0$, το πρώτο κύμα (Ι) φτάνει στο σημείο Κ, ενώ το δεύτερο (ΙΙ) στο σημείο Ο, στη θέση x=0, όπως παρουσιάζονται στο διπλανό σχήμα.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση κύματος *y=f(x,t)* για το πρώτο κύμα παίρνει τη μορφή:

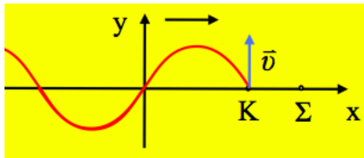
$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

ii) Ποια η εξίσωση της απομάκρυνσης *y=f(t)* του σημείου Ο, στη θέση x=0, λόγω του κύματος (Ι) και ποια η αντίστοιχη εξίσωση λόγω του κύματος (ΙΙ);

iii) Να αποδειχθεί ότι και το δεύτερο κύμα (ΙΙ), έχει την ίδια εξίσωση κύματος (1), με το κύμα (Ι).

iv) Να σχεδιάσετε ένα ποιοτικό διάγραμμα για το στιγμιότυπο του κύματος (ΙΙ), τη στιγμή που φτάνει στο σημείο Κ.

Απάντηση:



i) Το σημείο Κ στο πρώτο κύμα, ξεκινά να ταλαντώνεται από την θέση ισορροπίας με μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης υ προς τα πάνω, συνεπώς η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι της μορφής:

$$y_K = A\eta\mu\omega t = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$$

Αν πάρουμε ένα τυχαίο σημείο Σ, δεξιά του Κ, στη θέση x, τότε το κύμα θα καθυστερήσει να φτάσει κατά $t_1=\frac{d}{u}=\frac{x-x_K}{u}$, συνεπώς όταν ταλαντωθεί θα έχει εξίσωση απομάκρυνσης:

$$y_1 = A\eta\mu\omega t = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}(t-t_1) = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x-x_K}{u}\right) = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x-\lambda/2}{u}\right) \rightarrow$$

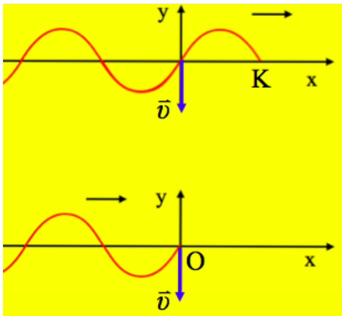
$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x-\lambda/2}{uT}\right) = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x-\lambda/2}{\lambda}\right) \rightarrow$$

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{2}\right)$$

Η παραπάνω εξίσωση που ισχύει για κάθε x, (με τον περιορισμό να έχει φτάσει το κύμα...) είναι η εξίσωση του κύματος (Ι).

ii) Αν στην παραπάνω εξίσωση του κύματος (Ι) θέσουμε x=0, θα πάρουμε για το σημείο Ο:

$$y_O = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{0}{\lambda}+\frac{1}{2}\right)=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{1}{2}\right)=A\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}+\pi\right) \quad (2)$$



Ποια φυσική σημασία έχει η αρχική φάση του σημείου Ο; Ότι τη στιγμή που το κύμα φτάνει στο Κ (τη στιγμή t_0=0), το Ο έχει εκτελέσει ήδη μισή ταλάντωση ή διαφορετικά ότι έχει αρχίσει να ταλαντώνεται τη στιγμή t΄=-T/2. Τι ταχύτητα έχει τη στιγμή t=0 το Ο; Αυτό περνάει από την θέση ισορροπίας κινούμενο προς τα κάτω, όπως στο σχήμα.

Ταχύτητα ταλάντωσης όμως με κατεύθυνση προς τα κάτω και μέγιστο μέτρο υ, έχει και το σημείο Ο, στο κύμα (ΙΙ), συνεπώς και στην περίπτωση του 2ου κύματος, για το Ο θα ισχύει επίσης η εξίσωση (2):

$$y_O = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{1}{2}\right)$$

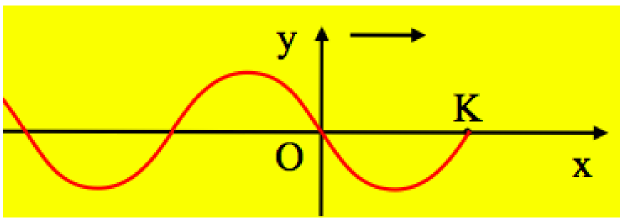
iii) Αλλά τότε ακολουθώντας την ίδια αποδεικτική πορεία με το ερώτημα i), θα έχουμε για το τυχαίο σημείο Σ, στη θέση x:

$$y_{II} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t-t'}{T}+\frac{1}{2}\right)=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t-{}^{x}\!/_{u}}{T}+\frac{1}{2}\right)=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{Tu}+\frac{1}{2}\right)\rightarrow$$

$$y_{II} = \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{2}\right) \quad (3)$$

Παρατηρήσουμε, ότι οι εξισώσεις (1) και (3) για τα δύο κύματα, έχουν την ίδια μορφή.

iv) Το δεύτερο κύμα, θα φτάσει στο σημείο Κ τη χρονική στιγμή t_1=T/2 αφού θα έχει διαδοθεί η ίδια μορφή προς τα δεξιά κατά λ/2, οπότε η μορφή του μέσου, το αντίστοιχο στιγμιότυπο, θα έχει την μορφή:



dmargaris@gmail.com