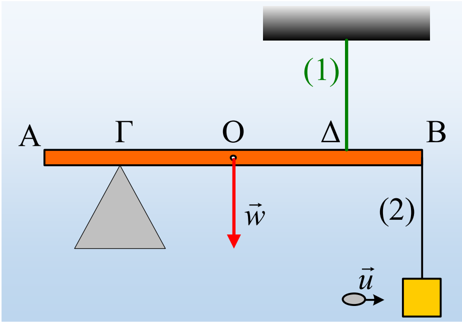
Η ράβδος σε ισορροπία και η πλάκα σε κίνηση



Η ομογενής ράβδος ΑΒ, μήκους 5m και βάρους 200Ν ισορροπεί σε οριζόντια θέση, ενώ στηρίζεται σε τρίποδο στο σημείο Γ, όπου (ΑΓ)=1m και κρέμεται στο άκρο Δ κατακόρυφου νήματος (1), όπου (ΔΒ)=1m. Μια πλάκα μάζας m_1=1,8kg κρέμεται στο άκρο του νήματος (2) μήκους 2m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί στο άκρο Β της ράβδου.

i) Να υπολογιστεί η δύναμη που δέχεται η ράβδος από το τρίποδο, κατά την παραπάνω ισορροπία.

Σε μια στιγμή μια σφαίρα μάζας m_2=0,2kg, η οποία κινείται οριζόντια με ταχύτητα u=40m/s σφηνώνεται στην πλάκα, δημιουργώντας ένα συσσωμάτωμα Σ, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο αμελητέων διαστάσεων.

ii) Να υπολογιστεί η ορμή και η στροφορμή, ως προς το άκρο Β της ράβδου, του συσσωματώματος Σ, αμέσως μετά την κρούση.

iii) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος (1), καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του Σ ως προς το Β, αμέσως μετά την κρούση,

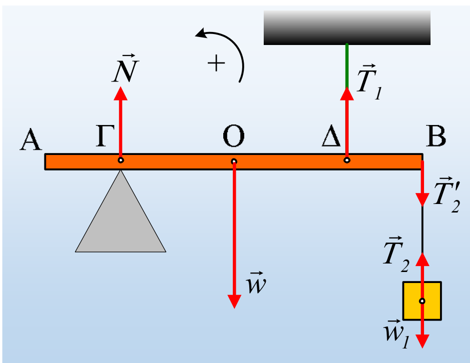
Μετά από λίγο το σώμα Σ φτάνει σε μια θέση Ε, με μηδενική ταχύτητα, ενώ η ράβδος διαρκώς ισορροπεί. Για την στιγμή αυτή:

iv) Να υπολογιστεί η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του Σ, ως προς το άκρο Β της ράβδου.

v) Να βρεθεί η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκεί το τρίποδο στην ράβδο.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σημειωθεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε ράβδο και πλάκα. Από την ισορροπία της πλάκας έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}=0 \to T_2=w_1=m_1g=1,8\cdot 10N=18N$$

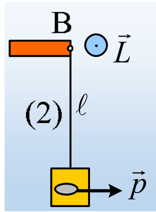
Οπότε η τάση του νήματος που ασκείται στο άκρο Β έχει επίσης μέτρο T_2'=18Ν, με φορά προς τα κάτω. Αλλά τότε από την ισορροπία της ράβδου, παίρνουμε για τις ροπές ως προς το Δ:

$$\Sigma\tau_\Delta=0 \to -N\cdot(\Gamma\Delta)+w\cdot(O\Delta)-T_2'\cdot(\Delta B)=0 \to$$

$$-N\cdot 3+200\cdot 1,5-18\cdot 1=0 \to N=\frac{282}{3}N=94N$$

ii) Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση, παίρνουμε:

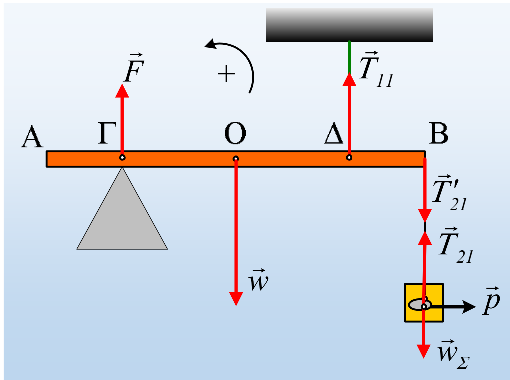
$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \to m_2 u = (m_1 + m_2)\upsilon = p \quad (1) \to$$
$$p = m_2 u = 0{,}2 \cdot 40 kgm/s = 8 kgm/s$$



Με κατεύθυνση, ίδια με την ταχύτητα u, όπως στο σχήμα. Εξάλλου η στροφορμή του σώματος Σ, ως προς το άκρο Β της ράβδου, είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, όπως στο σχήμα με μέτρο:

$$L = M\upsilon r = (m_1 + m_2)\upsilon \cdot \ell = p \cdot \ell = 8 \cdot 2 kgm^2/s = 16 kgm^2/s$$

iii) Η ταχύτητα του Σ μετά την κρούση, υπολογίζεται από την παραπάνω εξίσωση (1):



$$\upsilon = \frac{m_2 u}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}2 \cdot 40}{1{,}8 + 0{,}2} m/s = 4 m/s$$

Αλλά τότε για το Σ ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\Sigma F_R = M\frac{\upsilon^2}{R} \to T_{21} - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)\frac{\upsilon^2}{\ell} \to$$

$$T_{21} = (m_1 + m_2)g + (m_1 + m_2)\frac{\upsilon^2}{\ell} = 2 \cdot 10N + 2\frac{4^2}{2}N = 36N$$

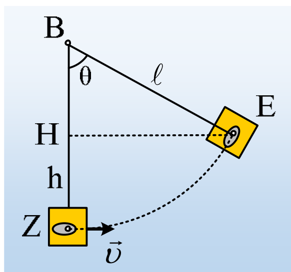
Όμως και η τάση T_{21} και το βάρος w_Σ του σώματος Σ διέρχονται από το σημείο Β, συνεπώς η ροπή του είναι μηδενική, οπότε και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, ως προς το Β, θα είναι μηδενικός:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_B = \Sigma\tau_B \to \left(\frac{dL}{dt}\right)_B = \tau_{T_{21}} + \tau_{w_\Sigma} = 0$$

Εξάλλου από την ισορροπία της ράβδου, παίρνοντας τις ροπές ως προς το σημείο Γ, θα έχουμε:

$$\Sigma\tau_\Gamma = 0 \to -w \cdot (\Gamma O) + T_{11} \cdot (\Gamma\Delta) - T'_{21} \cdot (\Gamma B) = 0 \to$$
$$-200 \cdot 1{,}5 + T_{11} \cdot 3 - 36 \cdot 4 = 0 \to T_{11} = 148N$$

iv) Έστω Ζ η θέση του σώματος αμέσως μετά την κρούση, όπου έχει ταχύτητα υ=4m/s. Στη συνέχεια κινείται σε κυκλική τροχιά κέντρου Β και ακτίνας l και φτάνει με μηδενική ταχύτητα στην θέση Ε, σε ύψος h, όπως στο σχήμα. Εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ μεταξύ των θέσεων Ζ και Ε, θεωρώντας U_Z=0, παίρνουμε:



$$K_Z + U_Z = K_E + U_E \to$$
$$\frac{1}{2}M\upsilon^2 + 0 = 0 + Mgh \to h = \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{4^2}{2 \cdot 10} m = 0{,}8m$$

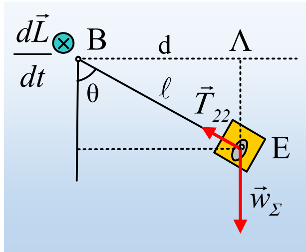
Αλλά τότε για την μέγιστη γωνία εκτροπής θ θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{(BH)}{(BE)} = \frac{\ell - h}{l} = \frac{2 - 0{,}8}{2} = 0{,}6$$

Και από την θεμελιώδη τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1\rightarrow\eta\mu\theta=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\sqrt{1-0{,}6^2}=\sqrt{0{,}64}=0{,}8$$

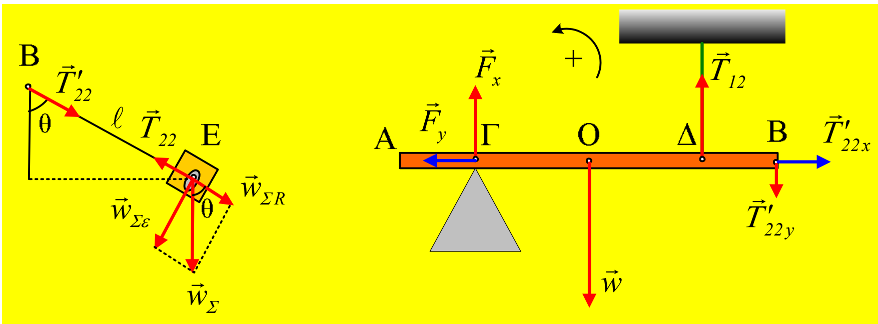
Αφού στην θέση Ε η ταχύτητα του συσσωματώματος Σ είναι μηδενική, μηδενική θα είναι και η στροφορμή του ως προς το Β. Ενώ αντίθετα, υπάρχει ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του ,ως προς το Β με κατεύθυνση όπως στο σχήμα και με **μέτρο**:



$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_B=\Sigma\tau_B=w_\Sigma\cdot d+T_{22}\cdot 0=\left(m_1+m_2\right)g\cdot\ell\eta\mu\theta\rightarrow$$

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_B=2\cdot 10\cdot 2\cdot 0{,}8\,{}^{kgm^2}\!/_{s^2}=32\,{}^{kgm^2}\!/_{s^2}$$

v) Στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο σώμα Σ. Εξαιτίας της μηδενικής ταχύτητας στην διεύθυνση της ακτίνας, $\Sigma F_R=0$, οπότε:



$$T_{22}=w_{\Sigma R}=\left(m_1+m_2\right)g\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=2\cdot 10\cdot 0{,}6N=12N=T'_{22}$$

Αναλύοντας την T_{22}΄σε δύο συνιστώσες, παίρνουμε τις συνιστώσες, όπως στο δεξιό σχήμα με μέτρα:

$$T'_{22x}=T'_{22}\cdot\eta\mu\theta=12\cdot 0{,}8N=9{,}6N\quad\kappa\alpha\iota$$
$$T'_{22y}=T'_{22}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=12\cdot 0{,}6N=7{,}2N$$

Ενώ από την ισορροπία της ράβδου παίρνουμε:

$\Sigma F_x=0$, *(2)* $\Sigma F_y=0$ *(3)* *και* $\Sigma\tau=0$, *(4)* ως προς οποιοδήποτε σημείο.

Οπότε από την (2) θα έχουμε:

$$F_x=T'_{22x}=9{,}6N$$

ενώ από την (4) ως προς το σημείο Δ:

$$\Sigma\tau_\Delta=0\rightarrow-F_y\cdot(\Gamma\Delta)+F_x\cdot 0+w\cdot(O\Delta)-T'_{22y}\cdot(\Delta B)+T'_{22y}\cdot 0=0\rightarrow$$
$$-F_y\cdot 3+200\cdot 1{,}5-7{,}2\cdot 1=0\rightarrow$$
$$F_y=97{,}6N$$

dmargaris@gmail.com