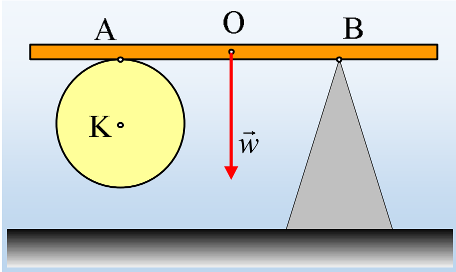
Μια ισορροπία πάνω σε κύλινδρο και τρίποδο



Μια ομογενής λεπτή ράβδος με μήκος 8m και βάρος 140N, ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως στο σχήμα, στηριζόμενη σε κύλινδρο στο σημείο Α και σε τρίποδο στο σημείο Β, όπου (ΑΟ)=(ΟΒ)=2m, με Ο το μέσον της ράβδου. Η ράβδος εμφανίζει με τον κύλινδρο συντελεστές τριβής $\mu_{s,1}=\mu_1=0{,}8$ και με το τρίποδο $\mu_{s,2}=\mu_2=0{,}6$. Ο κύλινδρος μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα οποίος συνδέει τα κέντρα Κ και Κ΄ των δύο βάσεων και αρχικά παραμένει ακίνητος.

i) Βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο στα σημεία στήριξης.

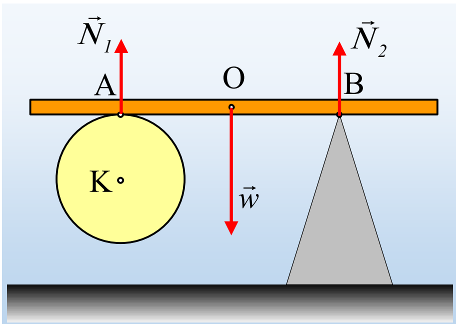
ii) Σε μια στιγμή θέτουμε σε περιστροφή τον κύλινδρο με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα ω=1rad/s.

α) Να αποδείξετε ότι η ράβδος δεν θα συνεχίσει να ισορροπεί.

β) Μήπως μεταβάλλοντας την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου, εξασφαλίζαμε την παραπάνω ισορροπία;

iii) Ποια η μέγιστη απόσταση ΟΒ΄)=x, στην οποία μπορεί να τοποθετηθεί το τρίποδο, ώστε η ράβδος να ισορροπεί, όταν θέτουμε σε περιστροφή τον κύλινδρο; Στην περίπτωση της μέγιστης αυτής απόστασης να υπολογιστούν οι τριβές που ασκούνται στην ράβδο, στα σημεία στήριξης.

Απάντηση:

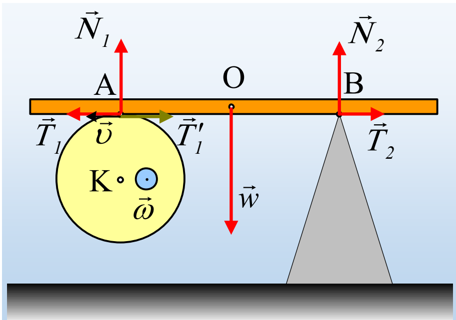


i) Η ράβδος ισορροπεί, χωρίς να δέχεται κάποια οριζόντια δύναμη η οποία να τείνει να την μετακινήσει οριζόντια, συνεπώς δεν πρόκειται να εμφανιστεί και κάποια δύναμη τριβής στα σημεία στήριξης Α και Β. Έτσι οι ασκούμενες δυνάμεις πάνω της, είναι κατακόρυφες, όπως στο σχήμα. Από την ισορροπία της ράβδου, έχουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow N_1+N_2=w \quad (1)$$

$$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow -N_1\cdot(AO)+N_2\cdot(OB)=0 \rightarrow N_1=N_2 \quad (2)$$

Από (1) και (2) βρίσκουμε $N_1=N_2=\dfrac{w}{2}=70N$



ii) Μόλις ο κύλινδρος τεθεί σε περιστροφή, το σημείο του που έρχεται σε επαφή με το σημείο Α της ράβδου, έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ προς τα αριστερά, οπότε δέχεται δύναμη τριβής ολίσθησης με φορά προς τα δεξιά και μέτρο $T_1'=\mu_1\cdot N_1$. Η αντίδρασή της είναι η τριβή ολίσθησης T_1, με φορά προς τα αριστερά, η οποία ασκείται στην ράβδο. Αλλά τότε η ράβδος τείνει να επιταχυνθεί προς τα αριστερά, οπότε θα δεχτεί δύναμη τριβής T_2, με φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα.

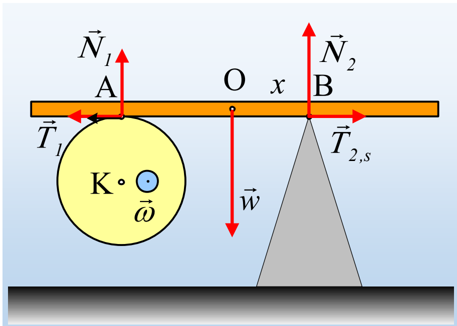
α) Τι τριβή είναι αυτή που ασκεί το τρίποδο; Αν είναι στατική, τότε η ράβδος ισορροπεί, αν είναι τριβή ολίσθησης, τότε θα έχουμε ολίσθηση και η ισορροπία καταστρέφεται. Ας υπολογίσουμε λοιπόν τις τριβές:

- Η τριβή T_1 είναι τριβή ολίσθησης και έχει μέτρο: $T_1 = \mu_1 N_1 = 0,8 \cdot 70N = 56N$.
- Η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής (η οριακή τριβή) που μπορεί να ασκηθεί στο σημείο Β έχει μέτρο:

$$T_{2,o\rho} = \mu_s N_2 = 0,6 \cdot 70N = 42N$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η τριβή που μπορεί να ασκηθεί από το τρίποδο, δεν μπορεί να εξουδετερώσει της τριβή T_1, με αποτέλεσμα η ράβδος να επιταχυνθεί προς τα αριστερά, ενώ η τριβή T_2 είναι και αυτή τριβή ολίσθησης με αρχικό μέτρο 42Ν. (στη συνέχεια τα μέτρα των τριβών θα αλλάξουν, αφού θα αλλάξουν οι κατακόρυφες δυνάμεις στήριξης N_1 και N_2.

β) Σε όλη την παραπάνω μελέτη δεν χρησιμοποιήσαμε πουθενά το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του κυλίνδρου. Σημασία έχει ότι υπάρχει κίνηση μεταξύ κυλίνδρου και ράβδου, οπότε αναπτύσσεται τριβή ολίσθησης. Αλλά αυτή, είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας μεταξύ των τριβομένων επιφανειών.



iii) Έστω ότι αλλάζουμε την θέση στήριξης στο τρίποδο, ώστε (ΟΒ)=x, με αποτέλεσμα, ενώ στρέφεται ο κύλινδρος, η ράβδος να ισορροπεί, οπότε η τριβή από το τρίποδο να είναι στατική τριβή $T_{2,s}$. Από την ισορροπία της ράβδου, παίρνουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_1 + N_2 = w \quad (3)$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T_1 = T_{2,s} \quad (4)$$

$$\Sigma \tau_o = 0 \rightarrow N_1 \cdot (AO) = N_2 \cdot x \quad (5)$$

Από (3) και (5) παίρνουμε ((ΑΟ)= ¼ l=2m):

$$\left.\begin{aligned} N_1 + N_1 \frac{l/4}{x} = w \rightarrow N_1 = \frac{w \cdot x}{2+x} \\ N_2 = N_1 \frac{l/4}{x} = \frac{w \cdot x}{2+x} \cdot \frac{2}{x} = \frac{2w}{2+x} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Οπότε από την (4) θα έχουμε:

$$T_1 = T_{2,s} \rightarrow \mu_1 N_1 = T_{2,s} \rightarrow \mu_1 \cdot \frac{w \cdot x}{2+x} = T_{2,s} \xrightarrow{T_{2,s} \le T_{2,o\rho}}$$

$$\mu_1 \cdot \frac{w \cdot x}{2+x} \le \mu_{s,2} \cdot \frac{2w}{2+x} \rightarrow \mu_1 \cdot x \le 2\mu_{s,2} \rightarrow$$

$$x \le \frac{2\mu_{s,2}}{\mu_1} \to x \le \frac{2\cdot 0,6}{0,8} \to x \le 1,5m$$

Αλλά τότε η μέγιστη απόσταση (ΟΒ΄), τοποθέτησης του τρίποδου, ώστε να διατηρηθεί η ισορροπία, είναι ίση με 1,5m.

Με βάση τώρα την εξίσωση (6), βρίσκουμε:

$$N_1 = \frac{w\cdot x}{2+x} = \frac{140\cdot 1,5}{2+1,5}N = \frac{210}{3,5}N = 60N \to T_1 = \mu_1 N_1 = 0,8\cdot 60N = 48N$$

$$N_2 = \frac{2w}{2+x} = \frac{2\cdot 140}{2+1,5}N = 80N \to T_{2,s} = T_{o\rho} = \mu_s N_2 = 0,6\cdot 80N = 48N$$

dmargaris@gmail.com