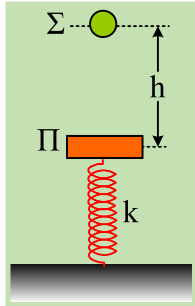
# Η θέση της κρούσης και δύο ταλαντώσεις




Μια σφαίρα (Σ) μάζας $m_1$=1kg συγκρατείται σε ύψος h=1,4m, πάνω από μια πλάκα (Π), μάζας $m_2$=2kg, η οποία ηρεμεί στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=50N/m, όπως στο σχήμα. Θέτουμε την πλάκα σε κατακόρυφη ταλάντωση πλάτους $A_1$ και στη συνέχεια, κάποια στιγμή ($t_o$=0) αφήνουμε ελεύθερη την σφαίρα να πέσει κατακόρυφα και να συγκρουσθεί την στιγμή $t_1$=0,6s, με την πλάκα. Αν η κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική και η σφαίρα, μετά την κρούση, αποκτά ταχύτητα προς τα πάνω μέτρου 4m/s, να βρεθούν:

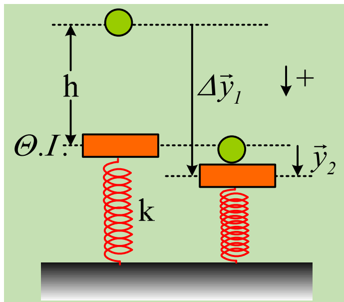
i) Η απομάκρυνση της πλάκας την στιγμή της κρούσης.

ii) Το πλάτος της ταλάντωσης $A_1$, πριν την κρούση.

iii) Το νέο πλάτος της ταλάντωσης της πλάκας, μετά την κρούση.

Δίνεται g=10m/s$^2$.

***Απάντηση:***




i) Η σφαίρα πραγματοποιεί ελεύθερη πτώση, για την οποία ισχύουν (θετική φορά προς τα κάτω):

$$\upsilon = gt \quad (1) \quad \Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση στην σχέση (2) παίρνουμε:

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}10\cdot 0,6^2\,m = 1,8m$$

Όμως η αρχική απόσταση της σφαίρας από την θέση ισορροπίας της πλάκας ήταν h=1,4m, συνεπώς η κρούση έγινε πιο κάτω από αυτήν την θέση ισορροπίας σε απόσταση d=Δ$y_1$-h=0,4m. Αλλά τότε θεωρώντας τα σώματα ως υλικά σημεία (αμελητέων διαστάσεων), με βάση και το διπλανό σχήμα και λαμβάνοντας και για την ταλάντωση την προς τα κάτω κατεύθυνση ως θετική (έχουμε δικαίωμα να πάρουμε την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική...), η απομάκρυνση της πλάκας θα είναι:

$$y_2 = +0,4m$$

ii) Για τις ταχύτητες των δύο σωμάτων, μετά την κεντρική και ελαστική μεταξύ τους κρούση, έχουμε τις εξισώσεις (με δείκτη $_1$ η σφαίρα και $_2$ η πλάκα):

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (3)$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (4)$$

Με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε την ταχύτητα της σφαίρας πριν την κρούση $\upsilon_1 = gt = 6m/s$, οπότε λύνοντας την (3) ως προς $\upsilon_2$ και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\upsilon_2 = \frac{m_1+m_2}{2m_2}\upsilon_1' - \frac{m_1-m_2}{2m_2}\upsilon_1 \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \frac{1+2}{2\cdot 2}(-4)\,{}^{m}\!/_{s} - \frac{1-2}{2\cdot 2}6\,{}^{m}\!/_{s} = -1,5\,{}^{m}\!/_{s}$$

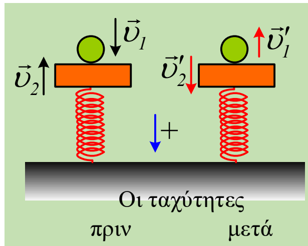
Η πλάκα δηλαδή την στιγμή που αρχίζει η κρούση, κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου 1,5m/s.

Εξάλλου η ενέργεια ταλάντωσης της πλάκας πριν την κρούση, παραμένει σταθερή, οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}Dy_2^2 = \frac{1}{2}DA_1^2 \xrightarrow{D=k}$$

$$A_1 = \sqrt{y_2^2 + \frac{m_2}{k}\upsilon_2^2} = \sqrt{0,4^2 + \frac{2}{50}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\,m = \sqrt{0,16 + \frac{9}{50\cdot 2}}\,m = 0,5m$$

iii) Με αντικατάσταση στην σχέση (4) βρίσκουμε την ταχύτητα της πλάκας αμέσως μετά την κρούση:




$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2 \rightarrow$$

$$\upsilon_2' = \frac{2\cdot 1}{1+2}6\,{}^{m}\!/_{s} + \frac{2-1}{1+2}(-1,5)\,{}^{m}\!/_{s} = 3,5\,{}^{m}\!/_{s}$$

Η πλάκα μετά την κρούση, θα ξεκινήσει μια νέα ταλάντωση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας (ΣF=0), άρα με αρχική απομάκρυνση $y_2' = y_2 = +0,4m$, οπότε ξανά από την ενέργεια ταλάντωσης, θα πάρουμε:

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + \frac{1}{2}Dy_2'^2 = \frac{1}{2}DA_2^2 \xrightarrow{D=k}$$

$$A_2 = \sqrt{y_2^2 + \frac{m_2}{k}\upsilon_2'^2} = \sqrt{0,4^2 + \frac{2}{50}\cdot(3,5)^2}\,m = \sqrt{0,65}m \approx 0,8m$$

**dmargaris@gmail.com**