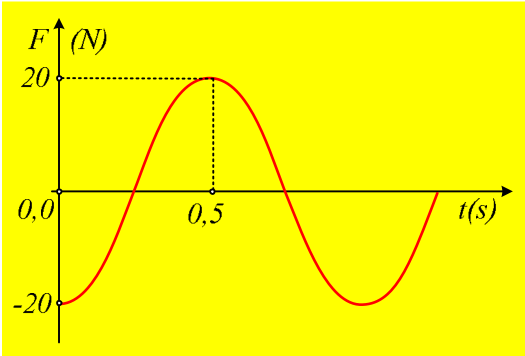
Γνωρίζοντας την δύναμη επαναφοράς



Ένα σώμα μάζας 1kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, με την επίδραση δύναμης επαναφοράς, η οποία μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν:

i) Το πλάτος και η ορμή του σώματος την στιγμή t_1=0,25s.

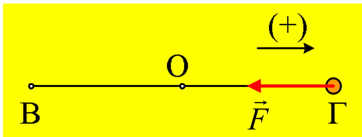
ii) Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο (x=f(t)).

iii) Το έργο της δύναμης επαναφοράς από τη στιγμή t_1=0,25s έως την στιγμή t_2=0,5s.

iv) Να γίνει η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της (της δυναμικής ενέργειας) την στιγμή t_2.

Δίνεται $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση.



Με βάση το διάγραμμα, την στιγμή t=0 το σώμα δέχεται δύναμη επαναφοράς με αρνητική αλγεβρική τιμή, πράγμα που σημαίνει ότι με βάση την εξίσωση F=-Dx, το σώμα βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση. Έτσι αφού το μέτρο της δύναμης είναι μέγιστο, αν φανταστούμε την κίνηση υλικού σημείου, στο τμήμα ΒΓ, γύρω από την θέση ισορροπίας Ο, όπως στο διπλανό σχήμα, τότε το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από την θετική ακραία θέση της ταλάντωσής του, σημείο Γ.

i) Η εξίσωση της δύναμης επαναφοράς είναι ίση με $F=-Dx=-m\omega^2\cdot x$, όπου:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T=1s} \omega = 2\pi \ (rad/s)$$ ενώ x=+A, οπότε για t=0 θα έχουμε:

$$x = A = -\frac{F}{m\omega^2} = -\frac{-20}{1\cdot 4\pi^2} m = 0,5m$$

Την στιγμή t_1=0,25s = ¼ T, με βάση το διάγραμμα F=0, το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας του O, κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση συνεπώς:

$$p_1 = m\upsilon_1 = -m(\omega A) = -1\cdot 2\pi\cdot 0,5kgm/s = -\pi \ kgm/s$$

ii) Αφού το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από την θέση x=+A, η απομάκρυνση έχει αρχική φάση π/2, με αποτέλεσμα η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο παίρνει την μορφή:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \rightarrow$$
$$x = 0,5\cdot\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

iii) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα από t_1 έως t_2 (από την θέση ισορροπίας του O, μέχρι να φτάσει στην ακραία θέση B) και παίρνουμε:

$$K_2 - K_1 = W_{\Sigma F} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = W_F \rightarrow$$

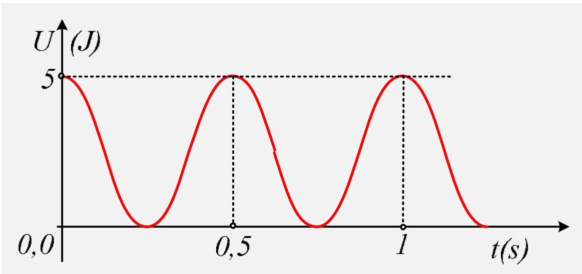
$$W_F = -\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -\frac{1}{2}m(\omega A)^2 = -\frac{1}{2}1\cdot(2\pi\cdot 0,5)^2\, J = -5J$$

iv) Για την δυναμική ενέργεια ταλάντωση έχουμε:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\cdot\left(0,5\cdot\eta\mu\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 \rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2}1\cdot(2\pi)^2\cdot 0,25\cdot\eta\mu^2\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right) = 5\cdot\eta\mu^2\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right) = 5\cdot\sigma\upsilon\nu^2\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Με γραφική παράσταση:



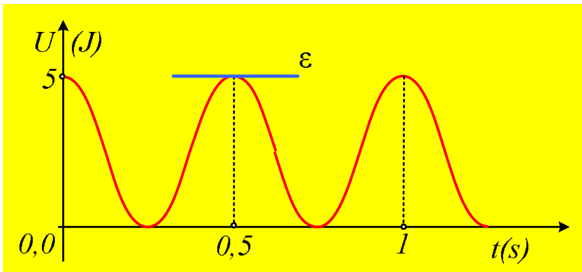
Εξάλλου το έργο της δύναμης επαναφοράς, συνδέεται με την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης με την εξίσωση $W_F = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = -\Delta U$, από όπου παίρνουμε:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_F}{dt} = -P_F = -\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{\upsilon}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha \quad (1)$$

Αλλά την στιγμή t_2=0,5s, το σώμα φτάνει στην θέση x=-A, έχοντας μηδενική ταχύτητα (υ=0), συνεπώς από την παραπάνω εξίσωση (1) προκύπτει ότι και ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας, θα είναι μηδενικός.

Σχόλιο:

Ο ζητούμενος ρυθμός ισούται με την κλίση της καμπύλης U=f(t). Αλλά αν πάρουμε την εφαπτόμενη της καμπύλης στο παραπάνω διάγραμμα, την στιγμή t_2, θα βρούμε την ευθεία ε, παράλληλη στον άξονα των χρόνων, με μηδενική κλίση, συνεπώς και ο αντίστοιχος ρυθμός είναι ίσος με μηδέν!



dmargaris@gmail.com