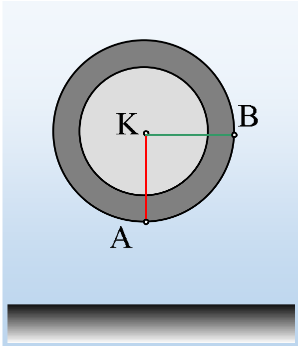
# Ένας τροχός σε οριζόντια βολή




Ένας τροχός ακτίνας R=0,8m εκτοξεύεται οριζόντια (προς τα δεξιά στο σχήμα) από ορισμένο ύψος, με το επίπεδό του κατακόρυφο, ενώ στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω. Στην διάρκεια της πτώσης του, το επίπεδό του παραμένει στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο (στο σχήμα, στο επίπεδο της σελίδας), ενώ το κέντρο του Κ (και κέντρο μάζας του) έχει σταθερή επιτάχυνση g. Σε μια στιγμή $t_1$, το σημείο Α, στο άκρο μιας κατακόρυφης ακτίνας, έχει κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου 3m/s και κατακόρυφη επιτάχυνση μέτρου $10m/s^2$. Για την στιγμή αυτή $t_1$, ζητούνται:

i) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού και ο ρυθμός μεταβολής της.

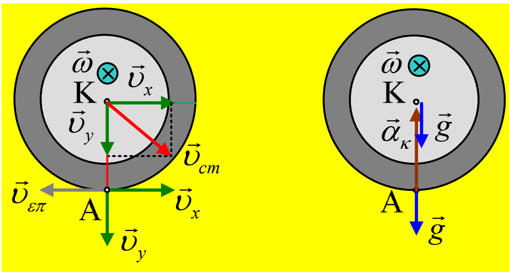
ii) Η ταχύτητα του κέντρου Κ του τροχού.

iii) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Β, στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας του τροχού.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

***Απάντηση:***

Θεωρούμε την κίνηση του τροχού σύνθετη. Μια μεταφορική, όπου το κέντρο μάζας Κ κινούμενο με σταθερή κατακόρυφη επιτάχυνση g, διαγράφει την γνωστή μας από την Β΄ τάξη παραβολική τροχιά και μια στροφική, γύρω από κάθετο στο επίπεδο του τροχού άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο Κ.




Αλλά τότε τη στιγμή $t_1$ το Κ θα έχει μια ταχύτητα $\upsilon_{cm}$, όπως στο πρώτο σχήμα, η οποία μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες $\upsilon_x$ και $\upsilon_y$, οριζόντια και κατακόρυφη. Τις ίδιες συνιστώσες ταχύτητας θα έχει και το σημείο Α, λόγω της μεταφορικής κίνησης. Εξάλλου εξαιτίας της κυκλικής κίνησης του Α, η οποία οφείλεται στην στροφική κίνηση του τροχού, θα έχει και μια γραμμική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{\varepsilon\pi}=\omega R$, εφαπτόμενη στον τροχό, συνεπώς οριζόντια. Αφού όμως το σημείο Α έχει κατακόρυφη ταχύτητα $\upsilon_y=3m/s$, θα πρέπει η επιτρόχια αυτή ταχύτητα να είναι αντίθετη της συνιστώσας $\upsilon_x$, δηλαδή για τα μέτρα τους θα ισχύει:

$$\upsilon_{\varepsilon\pi} = \upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = \upsilon_x \quad (1)$$

Για να συμβαίνει αυτό, ο τροχός πρέπει να έχει την γωνιακή ταχύτητα που έχει σημειωθεί στο σχήμα (ο τροχός στρέφεται ωρολογιακά).

i) Με την ίδια συλλογιστική, το κέντρο μάζας Κ έχει κατακόρυφη επιτάχυνση g και την ίδια επιτάχυνση θα έχει και το σημείο Α, λόγω της μεταφορικής κίνησης, ενώ λόγω της κυκλικής κίνησης θα έχει κατακόρυφη επιτάχυνση με κατεύθυνση προς το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς, μέτρου $\alpha_\kappa=\omega^2R$. Αλλά τότε (υποχρεωτικά... αλλά γιατί;):

$$\alpha_\kappa - g = a_A \to a_\kappa = g + a_A = 10\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2} + 10\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2} = 20\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2} \to$$

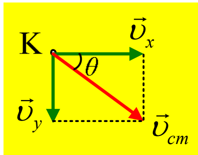
$$a_\kappa = \omega^2 R \to \omega = \sqrt{\frac{a_\kappa}{R}} = \sqrt{\frac{20}{0,8}}\,{}^{rad}\!/\!{}_{s} = 5\,{}^{rad}\!/\!{}_{s}$$

Αν ο τροχός έχει κάποια γωνιακή επιτάχυνση, τότε το σημείο Α θα είχε μια επιτρόχια επιτάχυνση, εφαπτόμενη του τροχού με μέτρο:

$$\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

Αλλά τότε το σημείο Α δεν θα είχε κατακόρυφη επιτάχυνση, όπως μας έχει δοθεί. Η μόνη περίπτωση δηλαδή, να έχει το Α κατακόρυφη επιτάχυνση είναι ο τροχός να έχει μηδενική γωνιακή επιτάχυνση οπότε και ο ζητούμενος ρυθμός, θα είναι μηδενικός: $\frac{d\omega}{dt} = 0$.

ii) Από την εξίσωση (1) βρίσκουμε:




$$\upsilon_x = \omega R = 5 \cdot 0,8\,{}^{m}\!/\!{}_{s} = 4\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

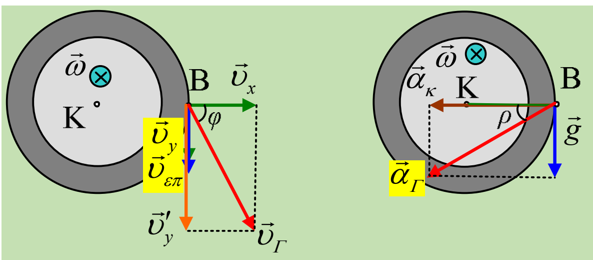
Αλλά τότε, με βάση και το διπλανό σχήμα, για την ταχύτητα $\upsilon_{cm}$ του κέντρου μάζας Κ, θα έχουμε, μέτρο:

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}\,{}^{m}\!/\!{}_{s} = 5\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

Ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{3}{4}$$

iii) Εφαρμόζοντας την παραπάνω συλλογιστική και για το σημείο Β, θα πάρουμε τα σχήματα ($\upsilon_x$ και $\upsilon_y$ οι δυο συνιστώσες της ταχύτητας του κέντρου μάζας, λόγω μεταφορικής κίνησης και $\upsilon_{\varepsilon\pi}$ η επιτρόχια (γραμμική) ταχύτητα λόγω της κυκλικής κίνησης του Β):




Έτσι το σημείο Β έχει κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητα:

$$\upsilon'_y = \upsilon_y + \upsilon_{\varepsilon\pi} = \upsilon_y + \omega R = 3\,{}^{m}\!/\!{}_{s} + 5 \cdot 0,8\,{}^{m}\!/\!{}_{s} = 7\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

Και τελικά ταχύτητα μέτρου:

$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y'^2} = \sqrt{4^2 + 7^2}\ {}^m\!/_s = \sqrt{65}\ {}^m\!/_s$$

Με διεύθυνση που σχηματίζει με την οριζόντια συνιστώσα $\upsilon_x$ γωνία φ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon_y'}{\upsilon_x} = \frac{7}{4}$$

Όσον αφορά τις επιταχύνσεις, το σημείο Β, λόγω μεταφορικής κίνησης έχει επιτάχυνση g, ίση με αυτή του κέντρου Κ και εξαιτίας της στροφικής κίνησης του τροχού την κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_\kappa$=20m/s$^2$, προς το κέντρο, όπως στο δεύτερο από τα παραπάνω σχήματα. Έτσι για το μέτρο της επιτάχυνσής του θα έχουμε:

$$\alpha_B = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + g^2} = \sqrt{20^2 + 10^2}\ {}^m\!/_{s^2} = \sqrt{500}\ {}^m\!/_{s^2} = 10\sqrt{5}\ {}^m\!/_{s^2}$$

Με διεύθυνση που σχηματίζει  γωνία ρ με την ακτίνα, όπου:

$$\varepsilon\varphi\rho = \frac{\alpha_y}{\alpha_x} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Ένα πρόσθετο:

***Ερώτημα:***

Αν ο τροχός αυτός προέκυψε από ένα αυτοκίνητο που πλησίαζε σε γκρεμό, τι κίνηση πραγματοποιούσε στον οριζόντιο δρόμο; Κύλιση, ολίσθηση ή σπινάριζε;

Αλλά και ένα:

***Σχόλιο:***

Στην  πραγματικότητα, κάθε στιγμή η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού είναι μηδενική, οπότε ο τροχός στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, αφού δεν δέχεται κάποια ροπή η οποία θα του μεταβάλλει την στροφική κίνηση... αλλά αυτό είναι μια άλλη ιστορία, η οποία απαγορεύεται να ειπωθεί!

***dmargaris@gmail.com***