Ο σκουριασμένος άξονας…

Λίγη θεωρία…

Γράφει το σχολικό βιβλίο:

> «Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν το σώμα δε θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση. Αυτό όμως δεν εξασφαλίζει ότι δε θα στραφεί. Αν υπάρχουν ροπές το σώμα θα στραφεί. Όταν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν, αν υπάρχουν ροπές, αυτές θα οφείλονται σε ζεύγη δυνάμεων.»

Τι ακριβώς σημαίνει συνισταμένη δύναμη και πώς αυτή συνδέεται με την μεταφορική κίνηση;

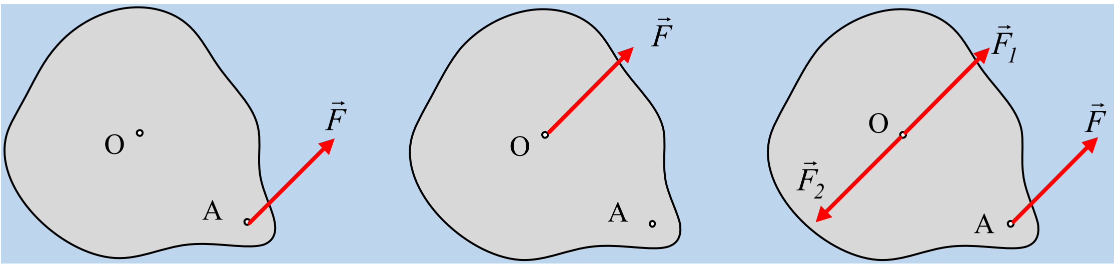
Μήπως γράφοντας το 2^o νόμο με τη μορφή:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm}$$

Δίνουμε απάντηση στα ερωτήματα αυτά;

Μήπως δηλαδή για να μιλήσουμε για συνισταμένη δύναμη, μεταφέρουμε όλες τις ασκούμενες δυνάμεις στο κέντρο μάζας; Και θεωρώντας ότι όλες οι δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο μάζας του σώματος μελετάμε την ισορροπία ή την επιτάχυνση του κέντρου μάζας;

Ναι, αλλά πώς μπορούμε να κάνουμε τη μεταφορά αυτή, χωρίς συνέπειες; Είναι το ίδιο μια δύναμη να ασκείται στο σημείο Α ενός αρχικά ακίνητου σώματος, όπως στο πρώτο σχήμα και το ίδιο η ίδια δύναμη αυτή να ασκείται στο κέντρο μάζας Ο;



Προφανώς στο πρώτο σχήμα η δύναμη έχει ροπή ως προς το Ο με αποτέλεσμα να προκαλέσει και περιστροφή (να προσδώσει γωνιακή επιτάχυνση), εκτός της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας. Αλλά τότε η μεταφορά της δύναμης από το Α στο Ο πρέπει να συνοδεύεται από «διατήρηση» της ασκούμενης ροπής. Αυτό γίνεται αν σκεφτούμε όπως στο 3^o σχήμα, όπου ασκούμε στο κέντρο μάζας Ο δύο επιπλέον αντίθετες δυνάμεις F_1 και F_2 με μέτρα ίσα με το μέτρο της F. Αλλά τότε μπορούμε «να δούμε» την εξής ισοδύναμη κατάσταση:

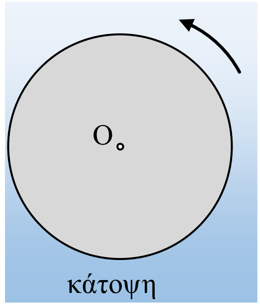
Στο κέντρο μάζας Ο ασκείται μια δύναμη F_1 με μέτρο $F_1=F$ και ένα ζεύγος δυνάμεων $F\text{-}F_2$ με ροπή $\tau=F\cdot d$.

Συμπέρασμα:

Η άσκηση μιας δύναμης σε ένα τυχαίο σημείο Α ενός στερεού, ισοδυναμεί με μια ίση δύναμη στο κέντρο μάζας και μια ροπή ζεύγους ($F\text{-}F_2$).

Εφαρμογή 1η:

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στρέφεται ένας ομογενής δίσκος γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο του O, χωρίς τριβές, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η δύναμη που ο άξονας ασκεί στο δίσκο.



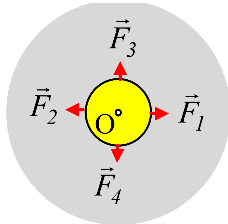
Απάντηση:

Αφού ο άξονας είναι σταθερός, το κέντρο μάζας του O παραμένει ακίνητο, οπότε από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το κέντρο μάζας του, παίρνουμε:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow \Sigma F = 0$$

$$\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \Sigma\tau = 0$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μας λένε ότι στον δίσκο δεν ασκείται καμιά οριζόντια δύναμη (οι ασκούμενες κατακόρυφες δυνάμεις βάρος και κάθετη αντίδραση δεν επηρεάζουν την κίνησή του) και καμιά ροπή.

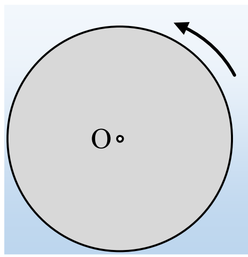


Συνεπώς αν σκεφτούμε ότι ο **πραγματικός άξονας** δεν είναι μια νοητή γραμμή, αλλά έχει διαστάσεις, είναι ένας κύλινδρος ορισμένης ακτίνας, τότε ή δεν ασκεί καθόλου δύναμη στον δίσκο ή ασκεί μικρές δυνάμεις όπως στο σχήμα (ο άξονας σε μεγέθυνση με κίτρινο χρώμα..), όπου έχουν σχεδιαστεί μόνο 4 δυνάμεις σε αντιδιαμετρικά σημεία.

Με βάση το σχήμα σε κάθε τέτοια δύναμη F_1 υπάρχει η αντιδιαμετρική της, οπότε αλληλοαναιρούνται. Ας σημειωθεί ότι όλες αυτές οι στοιχειώδεις δυνάμεις διέρχονται από το κέντρο μάζας O, οπότε δεν εμφανίζουν ροπή ως προς το σημείο O.

Εφαρμογή 2η:

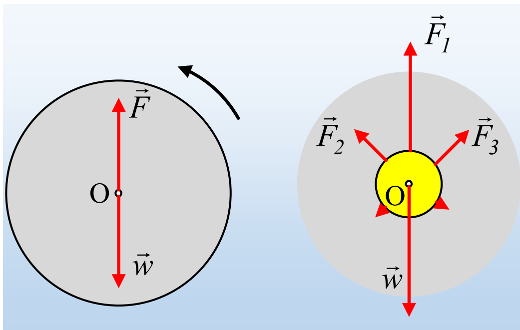
Ένας ομογενής δίσκος στρέφεται γύρω από σταθερό **οριζόντιο** άξονα x, ο οποίος περνά από το κέντρο του O, χωρίς τριβές, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η δύναμη που ο άξονας ασκεί στο δίσκο. Τι αλλάζει αν ο δίσκος παραμένει ακίνητος;



Απάντηση:

Έχουμε ξανά το κέντρο μάζας του O παραμένει ακίνητο, οπότε από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το κέντρο μάζας του, παίρνουμε:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow \Sigma F = 0$$

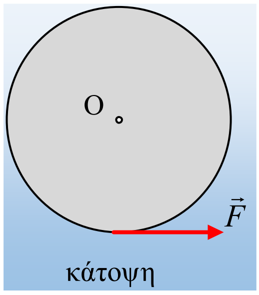


Αλλά τότε ο άξονας πρέπει να ασκήσει μια δύναμη F αντίθετη του βάρους στον δίσκο για την ισορροπία του, όπως στο σχήμα.

Αν πάρουμε ξανά σε μεγέθυνση τον άξονα, θα έχουμε το επόμενο σχήμα, όπου εξαιτίας του βάρους ο άξονας πιέζεται ασκώντας δυνάμεις συμμετρικές ως προς την κατακόρυφη που περνά από το κέντρο O και η συνισταμένη όλων των δυνάμεων, δίνει την δύναμη F που σχεδιάσαμε στο αριστερό σχήμα και που δεν είναι άλλη από την λεγόμενη δύναμη στήριξης Ν. Αξίζει να τονισθεί και εδώ ότι όλες αυτές οι δυνάμεις διέρχονται από το κέντρο Ο του δίσκου, οπότε δεν έχουμε εμφάνιση κάποιας επιπλέον ροπής, από τον άξονα. Προφανώς την ίδια ακριβώς κατάσταση έχουμε και αν ο δίσκος παραμένει ακίνητος, αφού και πάλι ΣF=0 και Στ=0…

Εφαρμογή 3η:

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στρέφεται ένας ομογενής δίσκος γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο του Ο, χωρίς τριβές, με την επίδραση μιας σταθερού μέτρου δύναμης F, εφαπτομενικής στον δίσκο. Να βρεθεί η δύναμη που ο άξονας ασκεί στο δίσκο.

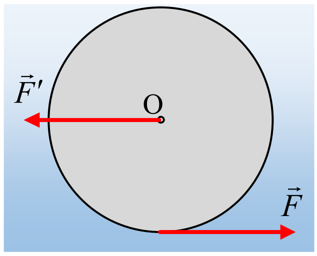


Απάντηση:

Έχουμε ξανά το κέντρο μάζας του Ο παραμένει ακίνητο, οπότε από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το κέντρο μάζας του, παίρνουμε:

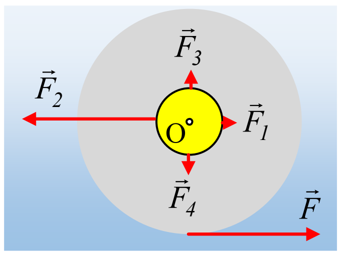
$$\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow \Sigma F = 0$$

Αλλά τότε ο άξονας πρέπει να ασκήσει μια δύναμη αντίθετη της F στον δίσκο για την ισορροπία του, όπως στο σχήμα.



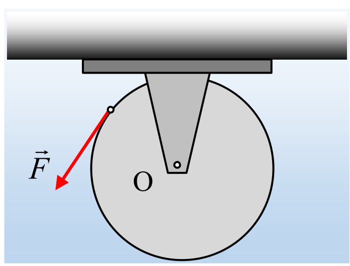
Αποτέλεσμα αυτού είναι τελικά στο δίσκο να ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων, το οποίο του προσδίδει κάποια γωνιακή επιτάχυνση, ενώ το κέντρο μάζας του Ο, παραμένει ακίνητο.

Πώς ακριβώς ο άξονας ασκεί την παραπάνω δύναμη; Αν πάρουμε ξανά σε μεγέθυνση τον άξονα, θα έχουμε το σχήμα, όπου η άσκηση της δύναμης F τείνει να επιταχύνει προς τα δεξιά το δίσκο, με αποτέλεσμα να μην δέχεται συμμετρικά δυνάμεις και η συνισταμένη όλων των δυνάμεων να δίνει την δύναμη F΄ που σχεδιάσαμε στο παραπάνω σχήμα. Αξίζει να τονισθεί και εδώ ότι όλες αυτές οι δυνάμεις διέρχονται από το κέντρο Ο του δίσκου, οπότε δεν έχουμε εμφάνιση κάποιας επιπλέον ροπής, από τον άξονα. Μένει μόνο η ροπή της δύναμης F ή αν προτιμάτε η ροπή του ζεύγους F-F΄.



Εφαρμογή 4η:

Ένας ομογενής δίσκος στρέφεται, γύρω από σταθερό **οριζόντιο** άξονα x, ο οποίος περνά από το κέντρο του Ο, χωρίς τριβές, με την επίδραση δύναμης F, μέσω νήματος, όπως στο σχήμα. Να βρεθεί η δύναμη που ο άξονας ασκεί στο δίσκο.

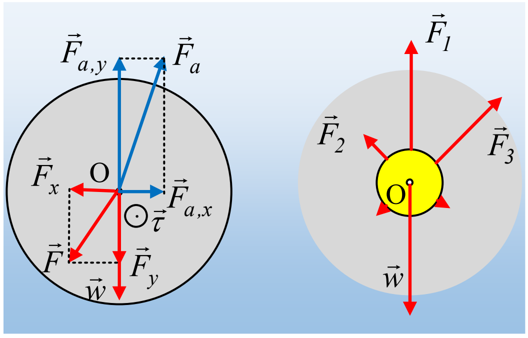


Απάντηση:

Το κέντρο μάζας του Ο του δίσκου παραμένει ακίνητο, οπότε από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το κέντρο μάζας του, παίρνουμε:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow \Sigma F = 0 \ (1)$$

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο, μεταφέροντάς τις στο κέντρο μάζας Ο, όπως στο σχήμα, όπου η μεταφορά της τάσης του νήματος F σημαίνει δράση και μιας επιπλέον ροπής ζεύγους τ=F·R. Αλλά τότε ο άξονας πρέπει να ασκήσει μια δύναμη F_α την οποία αναλύουμε σε δυο συνιστώσες, οπότε η παραπάνω σχέση (1) μετατρέπεται ισοδύναμα στις εξισώσεις:



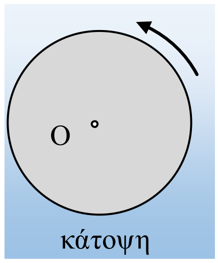
$$F_{\alpha,x} = F_x \text{ και } F_{\alpha,y} = w + F_y$$

Αν πάρουμε ξανά σε μεγέθυνση τον άξονα, θα έχουμε το δεξιό σχήμα, όπου εξαιτίας της δύναμης F, δεν υπάρχει πια συμμετρία με αποτέλεσμα $F_3 >> F_2$.

Όμως και πάλι όλες οι δυνάμεις F_i που ασκεί ο άξονας, διέρχονται από το κέντρο Ο του δίσκου, με αποτέλεσμα να μην έχουν ροπή ως προς το Ο.

Εφαρμογή 5η:

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στρέφεται ένας ομογενής δίσκος, με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0, γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο του Ο, με τον οποίο εμφανίζει τριβές. Ο δίσκος επιβραδύνεται λόγω των τριβών και μετά από λίγο σταματά. Να βρεθεί ποια η επίδραση του άξονα στον δίσκο.



Απάντηση:

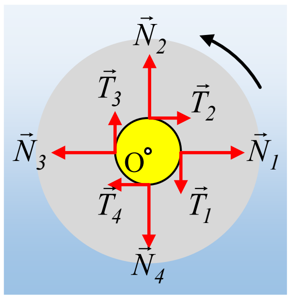
Το κέντρο μάζας του Ο του δίσκου παραμένει ακίνητο, οπότε από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το κέντρο μάζας του, παίρνουμε:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow \Sigma F = 0 \rightarrow F_{\alpha\xi} = 0$$

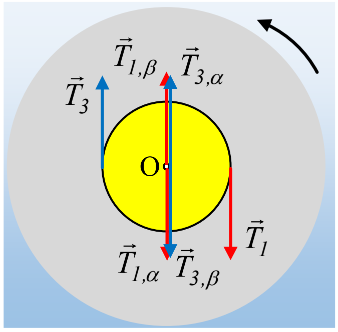
Παρατηρούμε δηλαδή ότι ο άξονας δεν ασκεί κάποια συνισταμένη δύναμη στον δίσκο. Αλλά για την στροφική κίνησή του ισχύει:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Ποια είναι η ροπή η οποία επιβραδύνει τον δίσκο; Προφανώς είναι η ροπή των δυνάμεων τριβής που ασκούνται στο δίσκο.



Στο σχήμα, σε μεγέθυνση, έχουν σημειωθεί 4 κάθετες αντιδράσεις και οι αντίστοιχες τριβές ολίσθησης. Λόγω συμμετρίας τα μέτρα των κάθετων αντιδράσεων N_i είναι ίσα, οπότε ανά δύο αλληλοεξουδετερώνονται δίνοντας μηδενική συνισταμένη. Εξάλλου οι φορείς τους διέρχονται από το κέντρο μάζας Ο, οπότε δεν εμφανίζουν ροπή, ως προς το κέντρο μάζας του δίσκου.

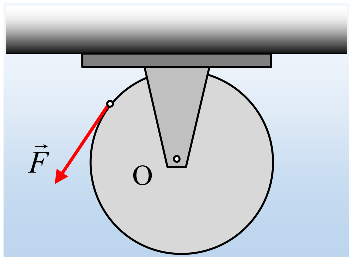


Πάμε στις τριβές. Η T_1 με την T_3 αποτελούν ζεύγος, εμφανίζοντας ροπή $τ_{1,3}$=T·2r, το ίδιο και οι T_2 με την T_4. Συνεπώς εξαιτίας των τριβών ο δίσκος δέχεται μια ροπή, η οποία τον επιβραδύνει στροφικά.

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να μεταφέρουμε στο κέντρο Ο, κάθε στοιχειώδη δύναμη τριβής T_i προσθέτοντας και μια ροπή ζεύγους, με μέτρο $τ_i=T_i·r$, όπως στο σχήμα, όπου η T_1 αντικαθίσταται από την $T_{1,α}$, ενώ η $T_{1,β}$ με την T_1 αποτελούν το ζεύγος που προστίθεται για την εξασφάλιση της ισοδύναμης ροπής.

Αλλά βλέποντας την T_1 η οποία αναπτύσσεται σε κάποιο τόξο ds και στην T_3 σε ίσου μήκους αντιδιαμετρικό τόξο ds΄, παρατηρούμε ότι δίνουν μηδενική συνισταμένη. Αυτό συμβαίνει για κάθε ζευγάρι αντιδιαμετρικών δυνάμεων, με αποτέλεσμα η συνισταμένη όλων των τριβών να είναι μηδενική, παραμένοντας όμως οι ροπές των αντίστοιχων ζευγών, πού μας δίνουν κάποια συνολική ροπή, η οποία και θα σταματήσει τον δίσκο.

Εφαρμογή 6η:

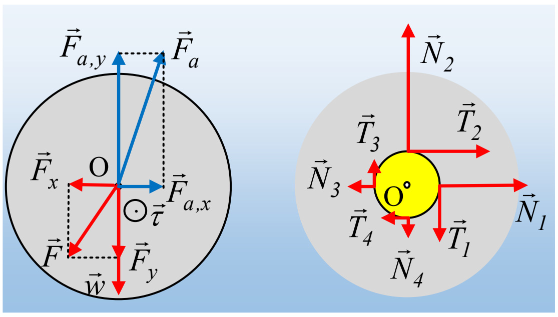


Ένας ομογενής δίσκος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό **οριζόντιο** άξονα x, ο οποίος περνά από το κέντρο του Ο, με τον οποίο εμφανίζει τριβές. Ασκούμε μέσω νήματος στο δίσκο μια δύναμη F, όπως στο σχήμα και ο δίσκος παραμένει ακίνητος. Να βρεθεί ποια η επίδραση του άξονα στον δίσκο.

Απάντηση:

Το κέντρο μάζας του Ο του δίσκου παραμένει ξανά ακίνητο, οπότε από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το κέντρο μάζας του, παίρνουμε:

$$ΣF=m·α_{cm} \rightarrow ΣF=0 \ (1)$$



Σκεπτόμενοι ξανά όπως και στην 4η εφαρμογή, βρίσκουμε τις δυνάμεις που ο άξονας ασκεί στο δίσκο, όπως στο πρώτο σχήμα. Αν τώρα μεγεθύνουμε ώστε να δούμε ποιος είναι ακριβώς ο ρόλος του άξονα, παίρνουμε το δεξιό σχήμα, παρόμοιο με το αντίστοιχο της παραπάνω εφαρμογής, αλλά και με σημαντικές διαφορές:

Οι κάθετες αντιδράσεις N_i δεν έχουν ίσα μέτρα και κατ΄ αναλογία και οι στατικές τριβές (έχουν σχεδιαστεί τέσσερις στο σχήμα) δεν έχουν επίσης ίσα μέτρα.

Αλλά τότε η T_1 με την T_3 δεν αποτελούν ζεύγος δυνάμεων και η συνισταμένη τους δεν είναι μηδενική!

Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι η δύναμη του άξονα $F_α$ δεν είναι η συνισταμένη μόνο των κάθετων N_i, αλλά και των τριβών. Και οι τριβές συνεισφέρουν στην δύναμη $F_α$. Θα μπορούσαμε να μεταφέρουμε όλες τις δυνάμεις (N_i και T_i) στο κέντρο Ο και να τις συνθέσουμε, παίρνοντας την συνισταμένη $F_α$. Βέβαια αν το κάναμε αυτό, η μεταφορά για τις N_i οι οποίες διέρχονται από το Ο, δεν δημιουργεί κάποιο πρόσθετο αποτέλεσμα, αλλά η μεταφορά κάθε στοιχειώδους τριβής T_i θα προσθέτει και μια αντίστοιχη ροπή ζεύγους $τ_i=T_i·r$!

Αλλά τότε η ανάπτυξη τριβής, δεν έχει μόνο αποτέλεσμα την άσκηση δύναμης από τον άξονα, αλλά και την εμφάνιση μιας ροπής, της ροπής της τριβής, η οποία υπολογίζεται από την συνθήκη για στροφική ισορροπία:

$$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow \tau_T+\tau_F=0 \rightarrow \tau_T=-F\cdot R$$

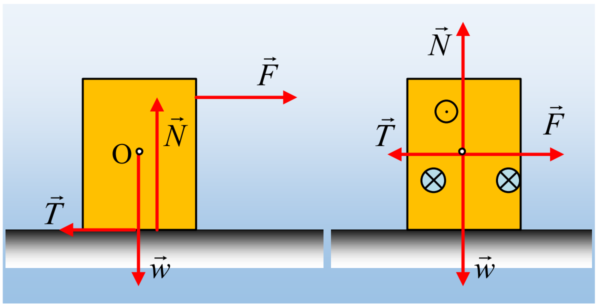
Και το ερώτημα είναι, αυτή τη ροπή των τριβών μπορούμε να την ονομάσουμε ροπή ζεύγους;

Η αλήθεια είναι ότι είναι το άθροισμα ροπών …πολλών ζευγών και όχι μόνο ενός ζεύγους! Αλλά χρειάζεται να αναφέρουμε όλη την παραπάνω ανάλυση ή μπορούμε να γράψουμε:

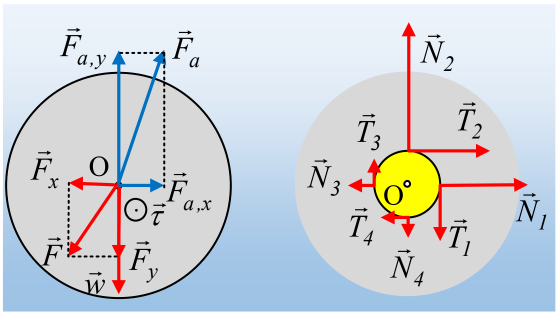
«Συνεπώς για την εξασφάλιση της ισορροπίας, απαιτείται και κάποια άλλη ροπή και αυτή πρέπει να είναι ροπή ζεύγους»;

Προσωπικά θεωρώ ότι η παραπάνω διατύπωση, που αναφέρεται σε «ζεύγος» και όχι ζεύγη μας καλύπτει, με την έννοια ότι αποδίδουμε την ισορροπία σε μια ροπή και όχι ψάχνοντας μια ακόμη δύναμη που προκαλεί ροπή.

Σχόλιο.



Θα μπορούσε μετά από όλα αυτά, κάποιος να αναρωτηθεί. Δηλαδή όταν έχουμε ένα στερεό όπως στο σχήμα και θέλουμε να εφαρμόσουμε τον πρώτο ή το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική του κίνηση, για παράδειγμα $\Sigma F=m\cdot\alpha_{cm}$, πρέπει να σχεδιάσουμε το πρώτο ή το δεύτερο σχήμα, όπου όλες οι δυνάμεις έχουν μεταφερθεί στο κέντρο μάζας Ο; Προφανώς θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε το 2ο σχήμα, όπου έχουν σημειωθεί και οι αντίστοιχες ροπές των τριών ζευγών κατά την μεταφορά των δυνάμεων (F, T και N). Αλλά αυτό δεν το κάνουμε, προτιμώντας να μείνουμε στο πρώτο σχήμα (και καλά κάνουμε…)



Αν όμως έχουμε μια τροχαλία, όπως στην τελευταία εφαρμογή; Πού ασκούνται οι δυνάμεις; Προφανώς από όλη την επιφάνεια του άξονα-κυλίνδρου, όπως φαίνονται στο δεύτερο σχήμα. Αλλά εμείς δεν θέλουμε να κάνουμε «μεγέθυνση» και δεν αναφερόμαστε σε διαστάσεις άξονα, θεωρώντας αμελητέα την ακτίνα του, οπότε υποχρεωτικά σχεδιάζονται όλες οι δυνάμεις στο κέντρο μάζας Ο, υπάρχει δηλαδή μια «ντε φάκτο» μεταφορά δυνάμεων στο κέντρο μάζας και καλό είναι να μην ξεχνάμε τις συνέπειες! Τις ροπές των αντίστοιχων ζευγών…. (Αυτός ο πληθυντικός δεν μου αρέσει καθόλου…)

dmargaris@gmail.com