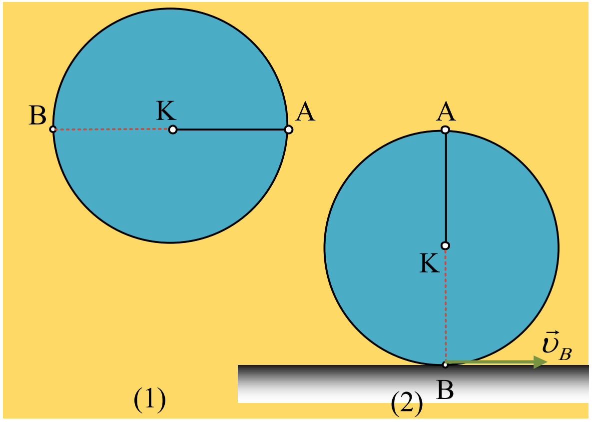
Η κίνηση ενός δίσκου.



Ο ομογενής δίσκος του σχήματος, κέντρου Κ και ακτίνας R=8/15 m μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το σημείο Α, στο άκρο της ακτίνας ΚΑ, χωρίς τριβές. Συγκρατούμε το δίσκο σε τέτοια θέση, ώστε η ακτίνα ΚΑ να είναι οριζόντια (θέση 1) και σε μια στιγμή τον αφήνουμε να κινηθεί.

i) Για τη στιγμή αμέσως μόλις αφεθεί ελεύθερος ο δίσκος να κινηθεί, να βρεθούν η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου καθώς και οι επιταχύνσεις του κέντρου Κ του δίσκου, καθώς και του σημείου Β, αντιδιαμετρικού του σημείου Α.

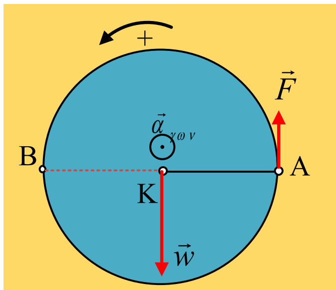
Μετά από λίγο η ακτίνα ΚΑ γίνεται κατακόρυφη (σχήμα 2), οπότε τη στιγμή αυτή το σημείο Β έρχεται σε επαφή με λείο οριζόντιο επίπεδο, έχοντας ταχύτητα υ_B=16/3 m/s. Στη θέση αυτή ο δίσκος αποδεσμεύεται από τον άξονα περιστροφής του στο Α και κινείται πλέον ελεύθερα στο οριζόντιο επίπεδο.

ii) Να υπολογιστούν οι επιταχύνσεις των σημείων Κ και Β ελάχιστα πριν την αποδέσμευση του δίσκου από τον άξονα και αμέσως μετά.

iii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Β μετά από χρονικό διάστημα Δt= (π/10)s, από τη στιγμή της αποδέσμευσης του δίσκου από τον άξονα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Κ I_{cm}= ½ MR^2.

Απάντηση:



i) Μόλις αφεθεί ο δίσκος να κινηθεί, στη θέση (1) δέχεται τις δυνάμεις του διπλανού σχήματος, το βάρος και μια δύναμη F από τον άξονα περιστροφής. Θεωρώντας θετική φορά περιστροφής την αντίθετη από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, παίρνουμε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση του δίσκου, γύρω από σταθερό άξονα:

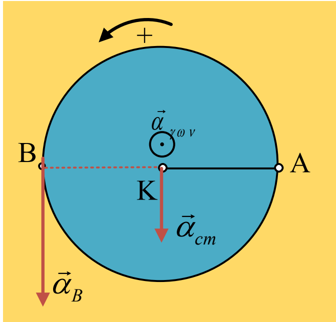
$$\Sigma\tau_A = I_A\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow mgR = I_A\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

Αλλά για τη ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα στο Α, με βάση το θεώρημα Steiner έχουμε:

$$I_A = I_{cm} + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

Οπότε από την (1) παίρνουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{mgR}{I_A}=\frac{mgR}{\frac{3}{2}mR^2}=\frac{2g}{3R}=\frac{2\cdot 10}{3\cdot \frac{8}{15}}rad/s^2=12{,}5rad/s^2.$$



Αλλά τότε τα σημεία Κ και Β έχουν κατακόρυφες επιταχύνσεις, όπως στο διπλανό σχήμα με μέτρα:

$$a_K=a_{cm}=a_{\gamma\omega\nu}\cdot R=12{,}5\cdot\frac{8}{15}m/s^2=\frac{20}{3}m/s^2$$

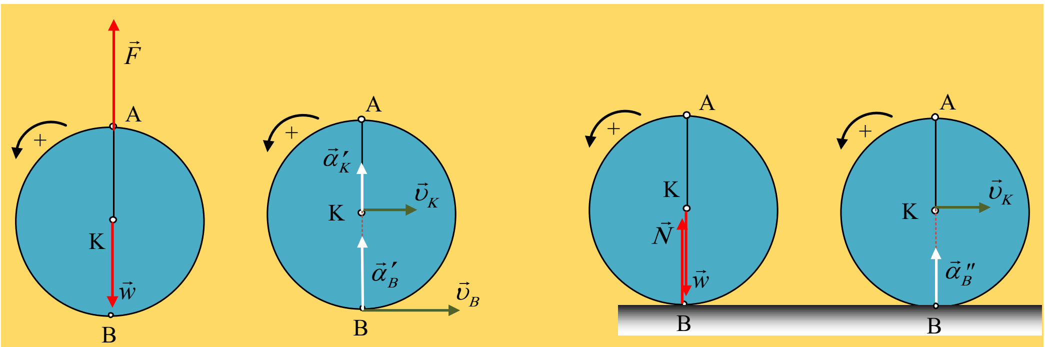
$$a_B=a_{\gamma\omega\nu}\cdot 2R=12{,}5\cdot 2\cdot\frac{8}{15}m/s^2=\frac{40}{3}m/s^2$$

ii) Πριν την αποδέσμευση του δίσκου από τον άξονα περιστροφής στο Α, η κίνησή του είναι στροφική, οπότε η ταχύτητα του σημείου Β, το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας r= 2R, με κέντρο το Α, συνδέεται με τη γωνιακή ταχύτητα με τη σχέση:

$$\upsilon_B=\omega\cdot r \;\rightarrow\; \omega=\frac{\upsilon_B}{2R}=\frac{\frac{16}{3}}{2\cdot\frac{8}{15}}rad/s=5rad/s \text{ ενώ}$$

$$\upsilon_K=\omega\cdot R=5\cdot 8/15\ m/s=8/3\ m/s.$$

Παίρνουμε ξανά το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τον δίσκο, μόλις η ακτίνα ΚΑ γίνει κατακόρυφη και πριν την αποδέσμευση από τον άξονα περιστροφής, όταν πάνω του ασκούνται οι δυνάμεις όπως στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα:



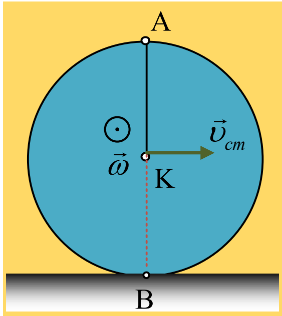
$$\Sigma\tau_A=I_A\alpha_{\gamma\omega\nu,1}\rightarrow 0=I_A\alpha_{\gamma\omega\nu,1}\;\rightarrow\;\alpha_{\gamma\omega\nu,1}=0$$

Αλλά αφού ο δίσκος δεν επιταχύνεται στροφικά, τα διάφορα σημεία του έχουν μόνο κεντρομόλο επιτάχυνση, λόγω κυκλικής κίνησης. Έτσι στο δεύτερο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι επιταχύνσεις των σημείων Κ και Β, με μέτρα:

$$\alpha'_K=\alpha_{K,\kappa}=\frac{\upsilon_K^2}{R}=\omega^2\cdot R=5^2\cdot\frac{8}{15}m/s^2=\frac{40}{3}m/s^2.$$

$$\alpha'_B=\alpha_{B.\kappa}=\frac{\upsilon_B^2}{r}=\omega^2\cdot 2R=5^2\cdot 2\cdot\frac{8}{15}m/s^2=\frac{80}{3}m/s^2.$$

Αμέσως μετά την αποδέσμευση του δίσκου από τον άξονά του στο σημείο Α, αυτός θα αρχίσει να κινείται στο λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση του βάρους και της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου, όπως στο τρίτο σχήμα παραπάνω. Αλλά τότε θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του δίσκου, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας του Κ, αφού ΣF=0 και $\Sigma\tau_K=0$, ο δίσκος κινείται χωρίς επιτάχυνση για την μεταφορική του κίνηση και χωρίς γωνιακή επιτάχυνση για την στροφική του κίνηση. Έτσι κινείται πλέον με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας Κ, μέτρου:

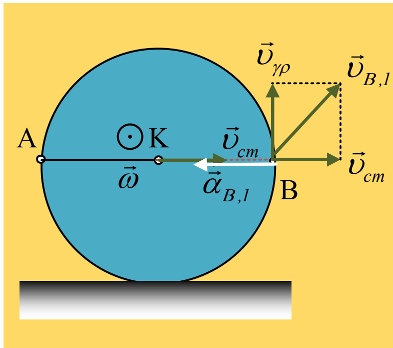


$$\upsilon_{cm}=\upsilon_K=\omega\cdot R=5\cdot 8/15\ m/s=8/3\ m/s.$$

και γωνιακή ταχύτητα ω=5rad/s, όπως στο διπλανό σχήμα.

Συνεπώς το κέντρο μάζας Κ θα κινηθεί ευθύγραμμα και ομαλά, χωρίς επιτάχυνση, ενώ το σημείο Β θα εκτελεί τώρα κυκλική κίνηση ακτίνας R, λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου, κέντρου Κ, έχοντας κεντρομόλο επιτάχυνση με κατεύθυνση όπως στο 4^o σχήμα, μέτρου:

$$\alpha''_B=\frac{\upsilon_B^2}{R}=\omega^2\cdot R=5^2\cdot {}^{8}\!/_{15}\, m/s^2={}^{40}\!/_{3}\, m/s^2.$$



iii) Με βάση τα παραπάνω, η στροφική κίνηση είναι ομαλή, όπου το σημείο Β σε χρονικό διάστημα Δt, θα διαγράψει γωνία:

$$\Delta\theta=\omega\cdot\Delta t=5\cdot\frac{\pi}{10}\ rad=\frac{\pi}{2}rad.$$

Συνεπώς η ακτίνα ΚΒ έχει στραφεί κατά 90° και έχει γίνει οριζόντια.

Αλλά τότε το σημείο Β έχει λόγω μεταφοράς ταχύτητα υ_{cm} και λόγω περιστροφής ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho}$, όπως στο σχήμα, μέτρου:

$$\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R=5\cdot 8/15\ m/s=8/3\ m/s.$$

Άρα η ταχύτητα το Β προκύπτει από τη διαγώνιο του τετραγώνου, με τη βοήθεια του Π.Θ.:

$$\upsilon_{B,1}=\sqrt{\upsilon_{cm}^2+\upsilon_{cm}^2}=\upsilon_{cm}\sqrt{2}={}^{8\sqrt{2}}\!/_{3}\ m/s$$

Με διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 45° με την οριζόντια διεύθυνση (γιατί;).

Εξάλλου η επιτάχυνση του σημείου Β, είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση για την κυκλική του κίνηση γύρω από το Κ, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$\alpha_{B,1}=\omega^2\cdot R=5^2\cdot {}^{8}\!/_{15}\, m/s^2={}^{40}\!/_{3}\, m/s^2.$$

dmargaris@gmail.com