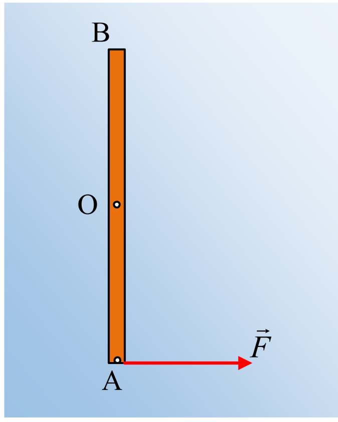
Γύρω από ποιο άξονα περιστρέφεται η ράβδος;



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ηρεμεί μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ=2m και μάζας m=3kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή δέχεται μια οριζόντια δύναμη μέτρου F=6N, κάθετη στην ράβδο, στο άκρο της Α, όπως στο σχήμα. Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της Ο, $I_{cm}= m\ell^2/12$.

i) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο της ράβδου, καθώς και η επιτάχυνση του άκρου Α, αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη F.

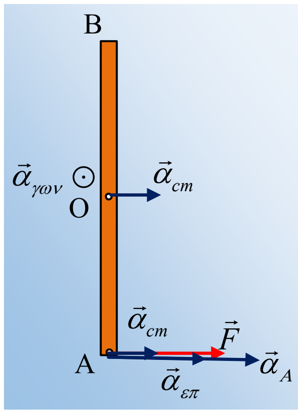
ii) Υποστηρίζεται ότι η κίνηση της ράβδου μπορεί να θεωρηθεί μόνο στροφική. Να εξετάσετε αν αυτό είναι σωστό ή όχι.

iii) Μπορείτε να υπολογίσετε την γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, θεωρώντας ως σημείο αναφοράς το άκρο Α της ράβδου και όχι το κέντρο μάζας Ο;

iv) Αν σας δίνετε ότι το άκρο Α της ράβδου αποκτά επιτάχυνση α_A=4m/s^2, όταν αλλάξουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης, να βρείτε την αρχική επιτάχυνση του κέντρου Ο της ράβδου, θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφή γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το σημείο Α.

Τα δύο τελευταία ερωτήματα απευθύνονται μόνο σε καθηγητές.

Απάντηση:



i) Θεωρούμε την κίνηση της ράβδου σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας της Ο. Παίρνοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα, για κάθε κίνηση έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = ma_{cm} \to a_{cm} = \dfrac{F}{m} = \dfrac{6}{3} m/s^2 = 2m/s^2$.

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau_o = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu} \to a_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{F\cdot \ell/2}{\frac{1}{12}m\ell^2} = \dfrac{6F}{m\ell} \to$

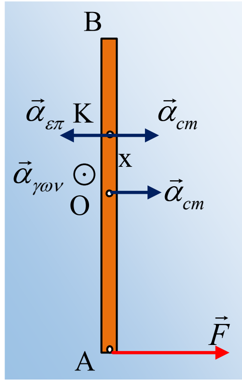
$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{6F}{m\ell} = \frac{6\cdot 6}{3\cdot 2} rad/s^2 = 6 rad/s^2.$$

Αλλά τότε το κέντρο μάζας έχει την επιτάχυνση που υπολογίστηκε από την μεταφορική κίνηση, μέτρου α_{cm}, παράλληλη της ασκούμενης δύναμης F, ενώ το άκρο Α, λόγω σύνθετης κίνησης αποκτά επιτάχυνση:

$$\alpha_A = \alpha_{cm} + a_{\gamma\omega\nu}\cdot \ell/2 = 2m/s^2 + 6\cdot 1m/s^2 = 8m/s^2.$$

Με την ίδια κατεύθυνση, όπως στο σχήμα.

ii) Παραπάνω **θεωρήσαμε** την κίνηση σύνθετη. Αυτό ήταν δικαίωμά μας, αλλά και ένας εύκολος και σίγουρος τρόπος να επιλύσουμε το πρόβλημα, χωρίς τον κίνδυνο να κάνουμε λάθος. Αλλά δεν παύει να είναι μια θεώρηση. Ας δούμε μια συνέπεια της παραπάνω μελέτης μας.



Έστω ένα σημείο Κ, μεταξύ Ο και Β, το οποίο αποκτά τις επιταχύνσεις α_{cm} και $\alpha_{\varepsilon\pi,K}$, όπως στο σχήμα, με βάση τη λογική της σύνθετης κίνησης. Αν x η απόσταση (ΚΟ), τότε υπάρχει κατάλληλη τιμή του x για την οποία $\alpha_{cm}=\alpha_{\varepsilon\pi,K}=\omega\cdot x$, οπότε η επιτάχυνση του σημείου Κ είναι μηδενική. Μηδενική επιτάχυνση σημαίνει ότι το σημείο Κ παραμένει ακίνητο, οπότε «βλέπουμε» μια στροφική και μόνο κίνηση της ράβδου, γύρω από το ακίνητο σημείο Κ, όμοια με το να πέρναγε από το Κ ένας κατακόρυφος σταθερός άξονας. Για την απόσταση x έχουμε:

$$\alpha_{cm}=a_{\gamma\omega\nu}\cdot x \to x=\frac{\alpha_{cm}}{a_{\gamma\omega\nu}}=\frac{2}{6}m=\frac{1}{3}m$$

Πράγματι αν κάποιος θεωρήσει την κίνηση στροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το Κ, θα πάρει εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma\tau_K=I_K a_{\gamma\omega\nu}\to F(\ell/2+x)=\left(1/12\, m\ell^2+mx^2\right)a_{\gamma\omega\nu}\to$$

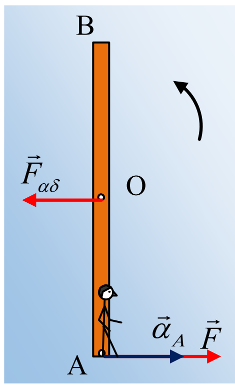
$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{F(\ell/2+x)}{1/12\, m\ell^2+mx^2}=\frac{6\left(1+1/3\right)}{1/12\, 3\cdot 2^2+3\left(1/3\right)^2}rad/s^2=6rad/s^2.$$

Οπότε για παράδειγμα, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο, έχει μέτρο:

$$\alpha_{cm}=a_{\gamma\omega\nu}\cdot x=6\cdot\frac{1}{3}m/s=2m/s^2$$

Τα παρακάτω δεν αφορούν μαθητές…

iii) Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το ερώτημα με δυο τρόπους:



α) θεωρούμε έναν μη αδρανειακό παρατηρητή στο άκρο Α, ο οποίος έχει επιτάχυνση α_A. Αυτός βλέπει τη ράβδο να στρέφεται γύρω του, ενώ στο κέντρο μάζας Ο ασκείται μια δύναμη d'Alembert, όπως στο σχήμα μέτρου $F_{\alpha\delta}=m\cdot\alpha_A$. Έτσι παίρνοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα βρίσκει:

$$\Sigma\tau_A=I_A a_{\gamma\omega\nu}\to F_{\alpha\delta}\cdot\ell/2=\left(1/12\, m\ell^2+m\frac{\ell^2}{4}\right)a_{\gamma\omega\nu}\to$$

$$ma_A\frac{1}{2}=\frac{1}{3}m\cdot\ell a_{\gamma\omega\nu}\to 3a_A=2\cdot\ell a_{\gamma\omega\nu}$$

Όμως από την μεταφορική κίνηση παίρνουμε $\alpha_{cm}=2m/s^2$, ενώ $\alpha_A=\alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot ½\,\ell$, οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$3a_A=2\cdot\ell a_{\gamma\omega\nu}\to 3\left(\alpha_{cm}+a_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{\ell}{2}\right)=2\cdot\ell a_{\gamma\omega\nu}\to$$

$$6+3a_{\gamma\omega\nu}=4a_{\gamma\omega\nu}\rightarrow a_{\gamma\omega\nu}=6rad/s^2.$$

β) Αφού το σημείο Α είναι κινούμενο σημείο της ράβδου, ο γενικευμένος νόμος παίρνει τη μορφή:

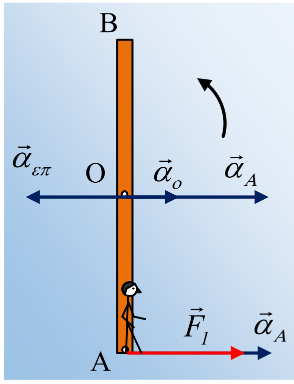
$$(\Sigma\vec{\tau})_A=\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_A-m\cdot\vec{r}_A\times\vec{a}_A$$

$$0=I_A\alpha_{\gamma\omega\nu}-m\cdot\alpha_A\cdot\frac{\ell}{2}\rightarrow\frac{1}{3}m\ell^2\alpha_{\gamma\omega\nu}=m\cdot\alpha_A\cdot\frac{\ell}{2}\rightarrow$$

$$3a_A=2\cdot\ell a_{\gamma\omega\nu}\rightarrow3\left(\alpha_{cm}+a_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{\ell}{2}\right)=2\cdot\ell a_{\gamma\omega\nu}\rightarrow$$

$$6+3a_{\gamma\omega\nu}=4a_{\gamma\omega\nu}\rightarrow a_{\gamma\omega\nu}=6rad/s^2.$$

iv) Θεωρώντας ότι η ράβδος στρέφεται γύρω από το άκρο Α, το οποίο έχει επιτάχυνση α_A, τότε το κέντρο μάζας Ο έχει επιτάχυνση λόγω περιστροφής $\alpha_{\varepsilon\pi}$ και την επιτάχυνση του σημείου Α, όπως στο σχήμα. Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο ως προς το άκρο Α της ράβδου, παίρνουμε:



$$(\Sigma\vec{\tau})_A=\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_A-m\cdot\vec{r}_A\times\vec{a}_A\rightarrow$$

$$0=I_A\alpha_{\gamma\omega\nu}-m\cdot\alpha_A\cdot\frac{\ell}{2}\rightarrow\frac{1}{3}m\ell^2\alpha_{\gamma\omega\nu}=m\cdot\alpha_A\cdot\frac{\ell}{2}\rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{3\alpha_A}{2\ell}=\frac{3\cdot4}{2\cdot2}rad/s^2=3rad/s^2.$$

Αλλά τότε το κέντρο Ο έχει επιτρόχια επιτάχυνση:

$$\alpha_{\varepsilon\pi}=a_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{\ell}{2}=3\cdot1m/s=3m/s^2.$$

Και συνολική επιτάχυνση:

$$\alpha_O=\alpha_A-a_{\varepsilon\pi}=4m/s^2-3m/s^2=1m/s^2.$$

Συμπέρασμα:

Στο σχολείο πρέπει να διδάσκουμε την σύνθετη κίνηση με περιστροφή γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο μάζας. Είναι ο μόνος σίγουρος και απλός δρόμος επίλυσης.

Αλλά η πραγματικότητα είναι ότι αν δεν υπάρχει ένας πραγματικός άξονας περιστροφής, η δική μας οπτική ματιά μπορεί να δει τα πράγματα από άλλες γωνίες, ισοδύναμα…

Περισσότερα πάνω στην εφαρμογή του 2^{ου} νόμου για άλλη σημεία, εκτός κέντρου μάζας, μπορείτε να διαβάσετε:

1. Μια αναλυτική μελέτη που έχει κατατεθεί στο δίκτυό μας από το Διονύση Μητρόπουλο:

Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής (Πλαίσιο – παραδείγματα)

2. ***Παίζοντας με το 2ο νόμο για την περιστροφική κίνηση.***

dmargaris@gmail.com