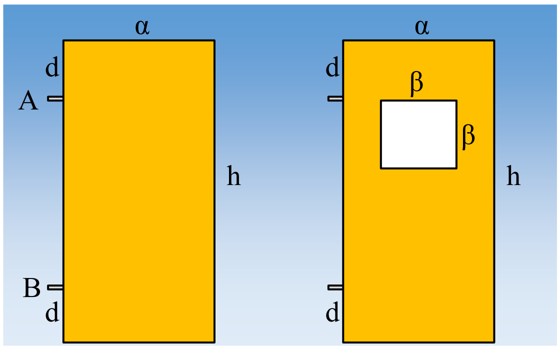
Ανοίγοντας ένα παράθυρο στην πόρτα

Μια ξύλινη ομογενής πόρτα μάζας M=30kg με άνοιγμα α=1m και ύψος h=2m, στηρίζεται σε δύο μεντεσέδες Α και Β, οι οποίοι απέχουν από το πάνω και το κάτω μέρος της, αποστάσεις d=0,25m, όπως στο σχήμα.



i) Αν ο κάτω μεντεσές Β ασκεί στην πόρτα οριζόντια δύναμη, να βρεθεί η δύναμη που δέχεται η πόρτα από τον πάνω μεντεσέ Α.

ii) Το πόσο εύκολα ανοιγοκλείνει η πόρτα καθορίζεται από την ροπή αδράνειας που εμφανίζει ως προς τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής της, ο οποίος περνά από τους μεντεσέδες. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω ροπή αδράνειας, είναι ανεξάρτητη του ύψους της πόρτας.

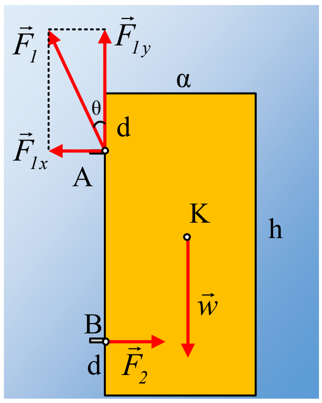
iii) Θέλοντας να κάνουμε ελαφρύτερη την πόρτα, αλλά και για να αερίζεται το δωμάτιο, ανοίγουμε ένα τετράγωνο παράθυρο, κόβοντας το ξύλο, με πλευρά β=0,5m, όπως στο δεύτερο σχήμα (το παράθυρο ισαπέχει από τις δύο κατακόρυφες πλευρές της πόρτας).

α) Πόσο τοις % μειώθηκε το βάρος της;

β) Πόσο της % μειώθηκε η ροπή αδράνειάς της, ως προς τον άξονα περιστροφής της;

Δίνεται g=10m/s², ενώ η ροπή αδράνειας μιας λεπτής ομογενούς σανίδας ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της $I_{cm} = \frac{1}{12} m\ell^2$.

Απάντηση:



i) Έστω ότι η οριζόντια δύναμη F_2 που ασκεί ο κάτω μεντεσές στην πόρτα, έχει φορά προς τα δεξιά (θα μπορούσαμε να υποθέσουμε και το αντίθετο…). Τότε η δύναμη από τον άνω, η F_1 θα έχει κατεύθυνση όπως στο διπλανό σχήμα. Από την ισορροπία της πόρτας, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F_2=F_{1x} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_{1y}=w=mg=300N \quad (2)$$

$$\Sigma \tau_A=0 \rightarrow F_2 \cdot (h-2d)-w \cdot \tfrac{1}{2}\alpha=0 \quad (3)$$

Από την εξίσωση (3) παίρνουμε:

$$F_2 = \frac{mga}{2(h-2d)} = \frac{30 \cdot 10 \cdot 1}{2(2-2 \cdot 0{,}25)} N = 100N$$

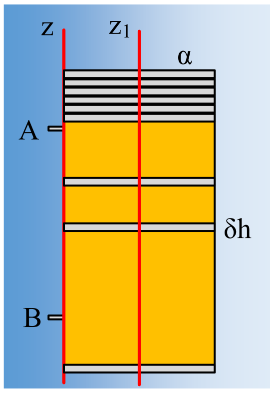
Αλλά τότε από την (1) παίρνουμε F_{1x}=100N, με φορά όπως στο σχήμα, ενώ από το Π.Θ. παίρνουμε :

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = \sqrt{100^2 + 300^2} N = 100\sqrt{10} N$$

Ενώ για τη διεύθυνση:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_{1x}}{F_{1y}} = \frac{100}{300} = {}^{1}\!/_{3}$$

ii) Χωρίζουμε την πόρτα σε πολύ λεπτές οριζόντιες σανίδες ύψους δh, όπως στο διπλανό σχήμα. Η ροπή αδράνειας κάθε σανίδας ως προς τον κατακόρυφο άξονα z_1 ο οποίος είναι κάθετος στο μέσον της, το οποίο είναι και κέντρο μάζας της σανίδας, είναι ίση:



$$\delta I_{cm} = \frac{1}{12}\delta m \ell^2 = \frac{1}{12}\delta m \cdot \alpha^2$$

Αλλά τότε η ροπή αδράνειας της πόρτας ως προς τον άξονα z_1, θα είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας, όλων των σανίδων:

$$I_{z1} = I_{cm,\pi} = \sum \delta I_{cm} = \sum \frac{1}{12}\delta m \cdot \alpha^2 = \frac{1}{12}\alpha^2 \sum \delta m = \frac{1}{12} M \cdot \alpha^2$$

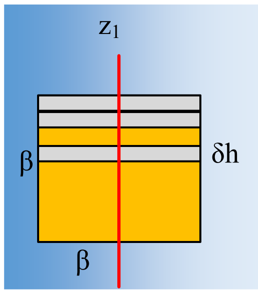
Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα steiner βρίσκουμε τη ροπή αδράνειας ως προς τον κατακόρυφο άξονα z, γύρω από τον οποίο στρέφεται η ράβδος:

$$I_z = I_{cm,\pi} + Md^2 = \frac{1}{12} M \cdot \alpha^2 + M\frac{\alpha^2}{4} = \frac{1}{3} M \cdot \alpha^2$$

Βλέπουμε δηλαδή η ροπή αδράνειας της πόρτας να είναι ανεξάρτητη του ύψους της.

iii) Έστω το παράθυρο, αποτελούμενο από το αρχικό ξύλο, όπως και όλη η πόρτα.

α) Έστω γ το πάχος της πόρτας και m η μάζα του παραθύρου (πριν την αφαιρεσή του). Για τις μάζες m και M ισχύουν:



$$m = \rho \cdot V_\pi = \rho \cdot \beta^2 \cdot \gamma \quad \text{και} \quad M = \rho \cdot V = \rho \cdot \alpha h \cdot \gamma$$

Με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{m}{M} = \frac{\rho\beta^2\gamma}{\rho\alpha h\gamma} = \frac{\beta^2}{\alpha h} \rightarrow m = M\frac{\beta^2}{\alpha h} = 30\frac{0{,}5^2}{1 \cdot 2}kg = 3{,}75kg$$

Αλλά τότε το βάρος του παραθύρου ως ποσοστό του βάρους της πόρτας είναι:

$$\pi_1 = \frac{w_1}{w}100\% = \frac{w_1}{w}100 = \frac{mg}{Mg}100\% = \frac{3{,}75}{30}100\% = 12{,}5\%$$

Αφαιρώντας λοιπόν το παράθυρο μειώνουμε κατά 12,5% το βάρος της πόρτας.

β) Δουλεύοντας όπως στο προηγούμενο ερώτημα, υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του παραθύρου (πριν την αφαιρεσή του), θεωρώντας ότι αποτελείται από λεπτές ομογενείς σανίδες μήκους β. Έτσι η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα z_1 θα είναι ίση:

$$I_{z1,2} = I_{cm,2} = \frac{1}{12} m \cdot \beta^2$$

Οπότε εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα steiner βρίσκουμε τη ροπή αδράνειας του παραθύρου, ως προς τον κατακόρυφο άξονα z, γύρω από τον οποίο στρέφεται η ράβδος είναι:

$$I_{z,2} = I_{cm,2} + md^2 = \frac{1}{12}m\cdot\beta^2 + m\frac{a^2}{4} = \frac{1}{12}m\cdot\left(\beta^2 + 3\alpha^2\right)$$

Αλλά τότε η ροπή αδράνειας του παραθύρου, ως ποσοστό της αρχικής ροπής αδράνειας της πόρτας είναι:

$$\pi_2 = \frac{I_{z,2}}{I_z}100\% = \frac{\frac{1}{12}m\cdot\left(\beta^2+3\alpha^2\right)}{\frac{1}{3}M\cdot\alpha^2}100 = \frac{m\cdot\left(\beta^2+3\alpha^2\right)}{M\cdot\alpha^2}100\% \rightarrow$$

$$\pi_2 = \frac{3{,}75(0{,}5^2+3\cdot 1)}{30\cdot 1^2}100\% \approx 10\%$$

Αλλά τότε αφαιρώντας το παράθυρο, μειώνουμε και τη ροπή αδράνειας της πόρτας σε ποσοστό 10%.

Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε εναλλακτικά να υπολογίσουμε την νέα ροπή αδράνειας $I_{z.\tau\epsilon\lambda}$ της πόρτας, μετά την αφαίρεση του παραθύρου, αφού η αρχική της ροπή αδράνειας γράφεται:

$$I_z = I_{z,\tau\epsilon\lambda} + I_{z,2} \rightarrow I_{z,\tau\epsilon\lambda} = I_z - I_{z,2} = \frac{1}{3}m\cdot\alpha^2 - \left(\frac{1}{12}m\cdot\beta^2 + m\frac{a^2}{4}\right)$$

Αλλά τότε το ζητούμενο ποσοστό μείωσης της ροπής αδράνειας γράφεται:

$$\pi_2 = \frac{I_z - I_{z,\tau\epsilon\lambda}}{I_z}100\% = \frac{I_{z,2}}{\frac{1}{3}M\cdot\alpha^2}100 \approx 10\%$$

dmargaris@gmail.com