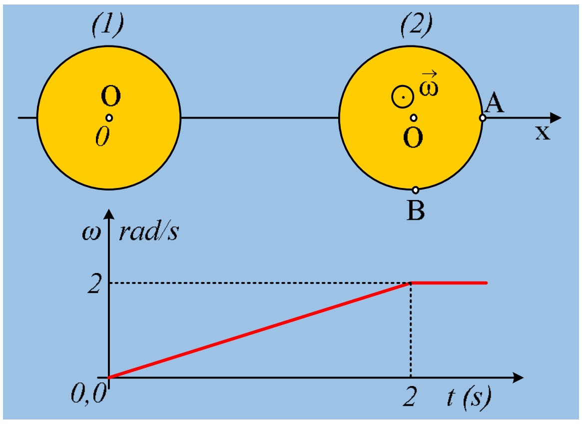
Ένας πλαγιασμένος δίσκος κινείται



Ένας οριζόντιος ομογενής δίσκος ακτίνας R=0,5m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με το κέντρο του Ο στην αρχή x=0 ενός οριζόντιου άξονα x΄x, στη θέση (1). Σε μια στιγμή δέχεται ένα κατάλληλο συνδυασμό ροπής και δύναμης, με αποτέλεσμα να αποκτά μια σταθερή επιτάχυνση κέντρου μάζας και να κινείται κατά μήκος του άξονα x, ενώ ταυτόχρονα αρχίζει να περιστρέφεται με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού και στο διάγραμμα δίνεται η μεταβολή της γωνιακής του ταχύτητας, η οποία τη στιγμή t_1=2s όπου το κέντρο Ο έχει φτάσει στη θέση (2) σταθεροποιείται. Αν μόλις σταθεροποιηθεί η γωνιακή ταχύτητα μηδενίζεται η επιτάχυνση του σημείου Α (η ακτίνα ΟΑ βρίσκεται πάνω στον άξονα x), ζητούνται:

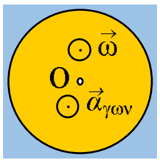
i) Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.

ii) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο, καθώς και η απόσταση μεταξύ των θέσεων (1) και (2).

iii) Η ταχύτητα του σημείου Α τη στιγμή t=2s, καθώς και η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Β, όπου η ακτίνα ΟΒ είναι κάθετη στην ΟΑ, τη στιγμή που μηδενίζεται η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.

Απάντηση:

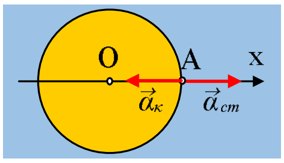
i) Γωνιακή επιτάχυνση έχει ο δίσκος στο χρονικό διάστημα 0-2s, όπου μεταβάλλεται η γωνιακή του ταχύτητα και είναι αριθμητικά ίση με την κλίση στο διάγραμμα ω-t. Όμως η κλίση αυτή παραμένει σταθερή, οπότε η στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση ταυτίζεται με τη μέση με τιμή:



$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2-0}{2-0}\, rad/s^2 = 1 rad/s^2.$$

Θετικής αλγεβρικής τιμής, συνεπώς κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω στο κέντρο Ο του δίσκου, ίδιας κατεύθυνσης με την γωνιακή ταχύτητα, όπως στο σχήμα (κάτοψη).

ii) Μόλις σταθεροποιηθεί η γωνιακή ταχύτητα ($t=t_1^+$), θεωρώντας ότι ο δίσκος εκτελεί σύνθετη κίνηση, τότε το σημείο Α θα έχει μια επιτάχυνση λόγω της μεταφορικής κίνησης α_{cm}, με φορά προς τα δεξιά και μια επιτάχυνση εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης, (αφού διαγράφει κύκλο ακτίνας R) την κεντρομόλο επιτάχυνση με φορά προς το κέντρο Ο και μέτρο $\alpha_\kappa=\omega^2 R$, όπως στο σχήμα. Αλλά αφού η επιτάχυνση του Α είναι μηδενική, θα έχουμε:



$$\alpha_{cm}=\alpha_\kappa=\omega^2\cdot R=2^2\cdot 0,5\ m/s^2 = 2m/s^2.$$

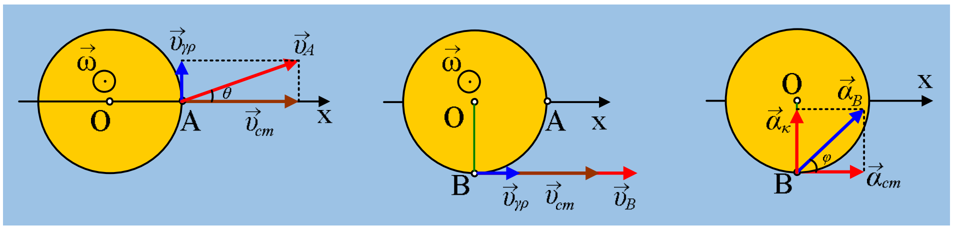
Αλλά η μεταφορική κίνηση είναι μια ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση για την οποία ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t \ \ (1) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x = ½ \, \alpha_{cm} \cdot t^2 \ \ (2)$$

Με αντικατάσταση στην (2) βρίσκουμε για την μετατόπιση του κέντρου Ο του δίσκου:

$$x_1 = ½ \, \alpha_{cm} t^2 = ½ \, 2 \cdot 2^2 m = 4 \, m.$$

iii) Στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες του σημείου Α.



Όπου λόγω μεταφορικής κίνησης $\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t = 2 \cdot 2$ m/s = 4m/s, ενώ λόγω της κυκλικής κίνησης το σημείο Α έχει γραμμική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = 2 \cdot 0{,}5$m/s = 1m/s. Αλλά τότε για την ταχύτητα του Α έχουμε:

$$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} m/s = \sqrt{17} m/s$$

Ενώ το διάνυσμά της σχηματίζει με τον άξονα x γωνία θ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{\upsilon_{cm}} = \frac{1}{4}$$

Για την ταχύτητα του σημείου Β, έχουμε με βάση το μεσαίο από τα παραπάνω σχήματα:

$$\upsilon_B = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = (4+1) m/s = 5 m/s$$

Με κατεύθυνση προς τα δεξιά, κάθετη στην ακτίνα ΟΒ.

Τέλος για την επιτάχυνση του σημείου Β, με βάση το τελευταίο σχήμα, όπου έχουν σχεδιαστεί η α_{cm} και η κεντρομόλος επιτάχυνση α_κ, έχουμε:

$$\alpha_B = \sqrt{\alpha_{cm}^2 + \alpha_\kappa^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} \frac{m}{s^2} = 2\sqrt{2} \ \ m/s^2$$

Με διεύθυνση που σχηματίζει γωνία φ=45° με την διεύθυνση x, αφού το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι …τελικά τετράγωνο.

dmargaris@gmail.com