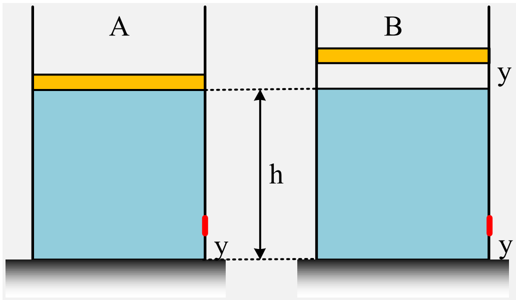
Το κλείσιμο με έμβολο, με αέρα και χωρίς αέρα.

Έστω δύο μεγάλα δοχεία Α και Β τα οποία περιέχουν νερό μέχρι ύψος h. Το πρώτο δοχείο κλείνεται με βαρύ έμβολο σε επαφή με την πάνω επιφάνεια του νερού, ενώ στο δεύτερο με ένα όμοιο έμβολο, αλλά σε αυτό έχει εγκλωβιστεί μια ποσότητα αέρα μεταξύ νερού και εμβόλου, ύψους y, όπως στο σχήμα. Σε ύψος y, από τους πυθμένες των δοχείων, υπάρχουν δυο τάπες ίδιου εμβαδού.



i) Μεγαλύτερη δύναμη από το νερό ασκείται στην τάπα:

α) του Α δοχείου,

β) του Β δοχείου,

γ) Στις δύο τάπες ασκούνται ίσες δυνάμεις.

ii) Σε μια στιγμή ανοίγουμε τις τάπες, οπότε μετά από λίγο έχουμε δύο μόνιμες ροές με ταχύτητες εκροής $υ_1$ και $υ_2$ για τα δοχεία Α και Β αντίστοιχα. Για τις ταχύτητες αυτές ισχύει:

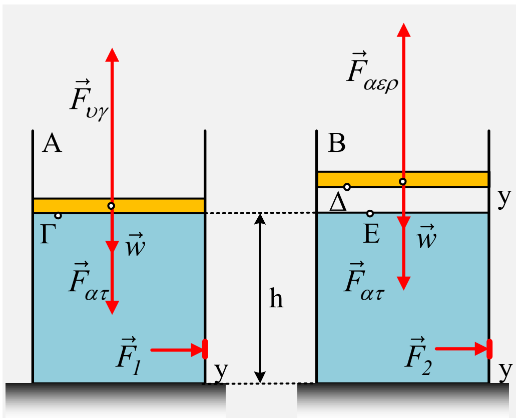
α) $υ_1 < υ_2$, β) $υ_1 = υ_2$, γ) $υ_1 > υ_2$.

Να δικαιολογήσετε αναλυτικά τις απαντήσεις σας.

Δίνεται ότι το εμβαδόν των δύο εμβόλων, είναι πολύ μεγαλύτερο από το εμβαδόν των δύο οπών από τις οποίες χύνεται το νερό, το οποίο θεωρούμε ιδανικό ρευστό. Δίνεται επίσης ότι ο εγκλωβισμένος αέρας βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας στη διάρκεια του πειράματος.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σημειωθεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε έμβολο, όπου $F_{ατ}$ η δύναμη από την ατμόσφαιρα, $F_{υγ}$ η δύναμη που ασκεί το νερό στο πρώτο έμβολο και $F_{αερ}$ η αντίστοιχη δύναμη στο δεύτερο έμβολο από τον εγκλωβισμένο αέρα. Από τις ισορροπίες των δύο εμβόλων παίρνουμε:



$$ΣF_1=0 \rightarrow F_{υγ}=F_{ατ}+w \rightarrow$$

$$\frac{F_{υγ}}{A}=\frac{F_{ατ}}{A}+\frac{w}{A} \rightarrow p_Γ = p_{at}+\frac{w}{A} \quad (1)$$

Όπου $p_Γ$ η πίεση στο σημείο Γ, στην κάτω πλευρά του πρώτου εμβόλου.

$$ΣF_2=0 \rightarrow F_{αερ}=F_{ατ}+w \rightarrow$$

$$\frac{F_{αερ}}{A}=\frac{F_{ατ}}{A}+\frac{w}{A} \rightarrow p_Δ = p_{at}+\frac{w}{A} \quad (2)$$

Όπου p_Δ η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα, αλλά και η πίεση σε όλα τα σημεία του όγκου που καταλαμβάνει ο αέρας, άρα και στην επιφάνεια του νερού στο δοχείο Β ($p_\Delta = p_E$).

Έστω $p_{\tau 1}$ η πίεση στην αριστερή πλευρά της τάπας στο δοχείο Α. Ισχύει:

$$p_{\tau 1} - p_\Gamma = \rho g \cdot \Delta h \rightarrow p_{\tau 1} = p_\Gamma + \rho g\,(h-y) \rightarrow$$

$$F_1 = p_{\tau 1} \cdot A = \left(p_\Gamma + \rho g(h-y)\right) \cdot A \quad (3)$$

Αντίστοιχα για την πίεση στην αριστερή πλευρά της τάπας στο Β δοχείο, έχουμε:

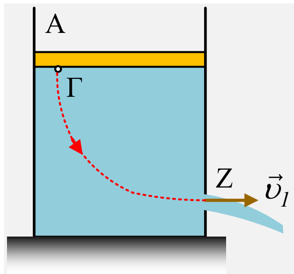
$$p_{\tau 2} - p_E = \rho g \cdot \Delta h \rightarrow p_{\tau 2} = p_E + \rho g\,(h-y) \rightarrow$$

$$F_2 = p_{\tau 2} \cdot A = \left(p_\Delta + \rho g(h-y)\right) \cdot A \quad (4)$$

Αλλά από τις (3) και (4) αφού $p_\Gamma = p_\Delta$ προκύπτει ότι $F_1 = F_2$.

Σωστό το γ).

ii) Για το Α δοχείο, εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Γ, στο κάτω μέρος του εμβόλου και το σημείο Ζ στην έξοδο, όπου το νερό έχει ταχύτητα υ_1:



$$p_\Gamma + \rho g(h-y) + \frac{1}{2}\rho \upsilon_\Gamma^2 = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2$$

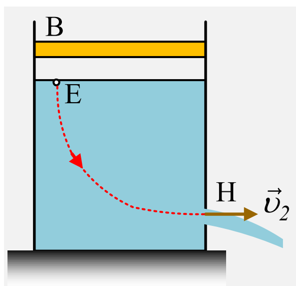
Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των διατομών στο Γ και Ζ, παίρνουμε:

$$\upsilon_\Gamma \cdot A_\Gamma = \upsilon_1 A_Z \rightarrow \upsilon_\Gamma = \frac{A_Z}{A_\Gamma}\upsilon_1 \rightarrow 0 \text{ οπότε:}$$

$$p_{at} + \frac{w}{A} + \rho g(h-y) = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(h-y) + \frac{2w}{\rho A}} \quad (5)$$

Αντίστοιχα για το Β δοχείο, με την ίδια λογική, έχουμε:



$$p_E + \rho g(h-y) + \frac{1}{2}\rho \upsilon_E^2 = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2$$

Και θεωρώντας $\upsilon_E \rightarrow 0$ παίρνουμε:

$$p_{at} + \frac{w}{A} + \rho g(h-y) = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(h-y) + \frac{2w}{\rho A}} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) παίρνουμε ότι $\upsilon_1 = \upsilon_2$. Σωστό το β).

dmargaris@gmail.com