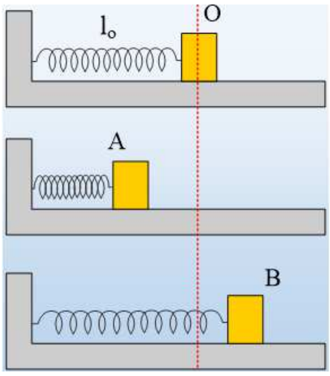
Κίνηση στο άκρο ελατηρίου και μια κρούση



Ένα σώμα Σ μάζας m=0,2kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=20N/m, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του (θέση Ο). Εκτρέπουμε το σώμα προς τα αριστερά, συμπιέζοντας το ελατήριο κατά d_1=0,4m, φέρνοντάς το στην θέση Α και το αφήνουμε να κινηθεί. Παρατηρούμε ότι το σώμα κινείται προς τα δεξιά και φτάνει μέχρι την θέση Β, όπου η απόσταση (ΟΒ)=d_2=0,3m. Στην θέση Β μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητα του σώματος.

i) Να αποδείξετε ότι το επίπεδο δεν είναι λείο και να υπολογίσετε την τριβή ολίσθησης που ασκείται στο σώμα.

ii) Να κάνετε την γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σώματος, σε συνάρτηση με την μετατόπιση του σώματος, στην διάρκεια της παραπάνω κίνησης, θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική.

iii) Ποια είναι η μέγιστη κινητική ενέργεια που αποκτά το σώμα στη διάρκεια της παραπάνω κίνησης;

iv) Τη στιγμή που το σώμα φτάνει στην θέση Β, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο σώμα Σ΄ μάζας 0,5kg, το οποίο κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου u=2,8m/s. Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος Σ, την στιγμή που φτάνει ξανά στην θέση Α.

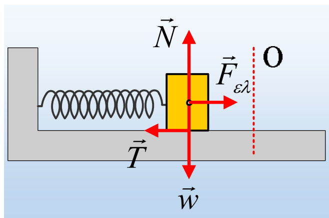
Απάντηση:

i) Αν υποθέσουμε ότι το επίπεδο είναι λείο, τότε η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα-ελατήριο παραμένει σταθερή. Αλλά τότε για τις θέσεις Α και Β θα είχαμε:

$$K_A + U_A = K_B + U_B \rightarrow$$

$$0 + \frac{1}{2}kd_1^2 = 0 + \frac{1}{2}kd_2^2 \rightarrow d_1 = d_2$$

Πράγμα άτοπο, αφού d_2=0,3m < 0,4m=d_1.



Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα, για την κίνησή του από την θέση Α, μέχρι τη θέση Β, παίρνουμε:

$$K_B - K_A = W_w + W_N + W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_T \rightarrow$$

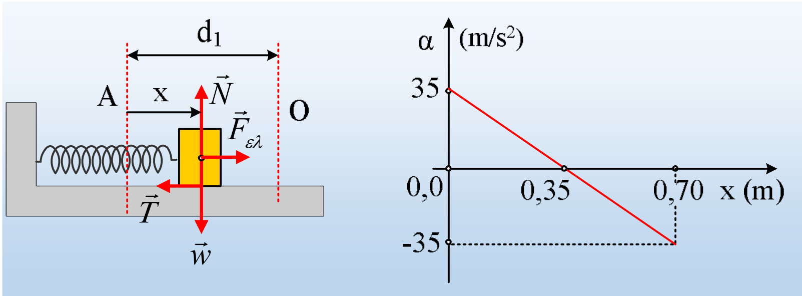
$$0 - 0 = 0 + 0 + (U_A - U_B) - T(d_1 + d_2) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}kd_1^2 - \frac{1}{2}kd_2^2 - T(d_1 + d_2) = 0 \rightarrow$$

$$T = \frac{k\left(d_1^2 - d_2^2\right)}{2(d_1 + d_2)} = \frac{1}{2}k(d_1 - d_2) = \frac{1}{2}20\left(0,4 - 0,3\right)N = 1N$$

Να σημειωθεί, ότι θα μπορούσαμε να σκεφτούμε με βάση της διατήρηση της ενέργειας, ότι η μείωση της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, μεταξύ των θέσεων Α και Β, είναι ίση με την ενέργεια που εμφανίζεται ως θερμική, λόγω τριβής, στις τριβόμενες επιφάνειες.

ii) Στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα, έχουμε πάρει το σώμα Σ σε μια τυχαία θέση, έχοντας μετατοπισθεί κατά x, από την αρχική του θέση Α και έχουμε σχεδιάσεις τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του.



Εφαρμόζουμε για το σώμα τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής και παίρνουμε:

$$\Sigma F = ma \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - T = ma \rightarrow k(d_1 - x) - T = ma \rightarrow$$

$$a = \frac{k(d_1 - x) - T}{m} = \frac{20(0,4 - x) - 1}{0,2} = 40 - 100x - 5$$

$$a = 35 - 100x \quad (S.I.) \quad (1)$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (1) φαίνεται στο δεξιό παραπάνω σχήμα.

iii) Με βάση το παραπάνω διάγραμμα της επιτάχυνσης, παρατηρούμε ότι το σώμα επιταχύνεται προς τα δεξιά, μέχρι να μετατοπισθεί κατά x_1=0,35m, φτάνοντας στην θέση Γ, απέχοντας κατά d_3= d_1-x_1=0,05m από την θέση Ο, αφού από κει και πέρα επιβραδύνεται μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του στην θέση Β. Αλλά τότε στην θέση Γ θα έχει και την μεγαλύτερη ταχύτητα. Έτσι εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. από την θέση Α, μέχρι τη θέση Γ, παίρνουμε:

$$K_\Gamma - K_A = W_w + W_N + W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_T \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2 - 0 = 0 + 0 + (U_A - U_\Gamma) - Tx_1 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2} kd_1^2 - \frac{1}{2} kd_3^2 - Tx_1 = 0 \rightarrow$$

$$K_{max} = \frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2} 20 \cdot 0,4^2 J - \frac{1}{2} 20 \cdot 0,05^2 J - 1 \cdot 0,35 J = 1,225 J$$

iv) Η ταχύτητα που αποκτά το σώμα Σ, μετά την κεντρική ελαστική του κρούση με το σώμα Σ΄, θα είναι ίση (θετική η φορά προς τα δεξιά και m_1=0,5kg η μάζα του Σ΄):

$$\upsilon_B = \frac{2m_1}{m + m_1} u = \frac{2 \cdot 0,5}{0,2 + 0,5} (-2,8) m/s = -4 m/s$$

Το σώμα Σ δηλαδή θα κινηθεί προς τα αριστερά και εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ της θέσης Β και της θέσης Α, θα πάρουμε για το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ, στην θέση Α:

$$K_A - K_B = W_w + W_N + W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_T \rightarrow$$

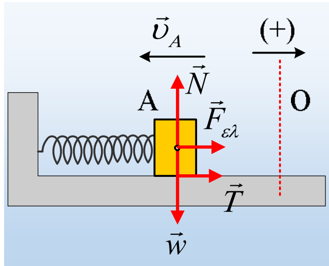
$$\frac{1}{2} m\upsilon_A^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_B^2 = 0 + 0 + (U_B - U_A) - T\left(d_1 + d_2\right) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_A^2-\frac{1}{2}m\upsilon_B^2=\frac{1}{2}kd_2^2-\frac{1}{2}kd_1^2-T\left(d_1+d_2\right)\rightarrow$$

$$\upsilon_A=\sqrt{\upsilon_B^2+\frac{k}{m}\left(d_2^2-d_1^2\right)-\frac{2T\left(d_1+d_2\right)}{m}}\rightarrow$$

$$\upsilon_A=\sqrt{4^2+\frac{20}{0,2}\left(0,3^2-0,4^2\right)-\frac{2\cdot 1\left(0,4+0,3\right)}{0,2}}m/s=\sqrt{2}\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ, καθώς περνά από την θέση Α, κινούμενο προς τα αριστερά. Από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής παίρνουμε:



$$\Sigma F=ma\rightarrow F_{\varepsilon\lambda}+T=ma_A\rightarrow kd_1+T=ma_A\rightarrow$$

$$a_A=\frac{kd_1+T}{m}=\frac{20\cdot 0,4+1}{0,2}\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}=45\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}$$

dmargaris@gmail.com