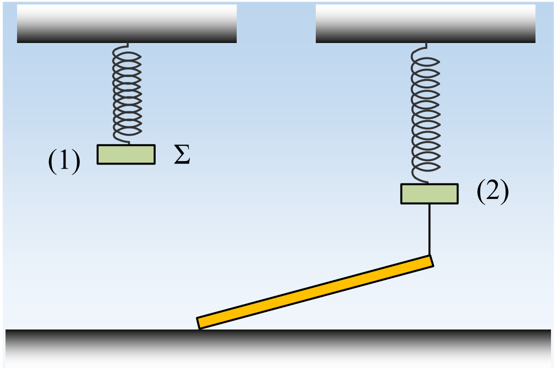
Δυο ισορροπίες, η μία με ράβδο

Ένα σώμα Σ μάζας m ηρεμεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, στη θέση (1) του σχήματος. Δένουμε μέσω νήματος, το σώμα Σ στο άκρο ομογενούς ράβδου μάζας M=2m, το άλλο άκρο της οποίας στηρίζεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και αφήνουμε το σύστημα να ταλαντωθεί. Εξαιτίας αποσβέσεων, μετά από λίγο το σώμα Σ ηρεμεί ξανά στη θέση (2).



i) Στη θέση (2) το ελατήριο είναι κατακόρυφο ή όχι; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Αν U_1 η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση (1) και U_2 η αντίστοιχη στη θέση (2), ισχύει:

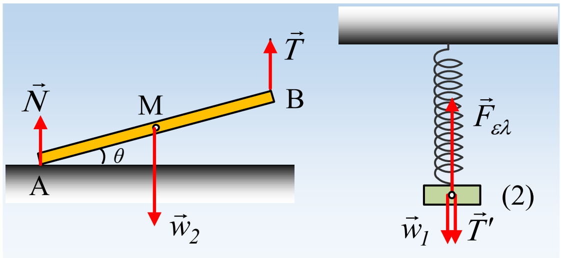
α) $U_2=2U_1$, β) $U_2=3U_1$, γ) $U_2=4U_1$, δ) $U_2=5U_1$.

iii) Να αποδείξτε ότι η απώλεια της μηχανικής ενέργειας, εξαιτίας των αποσβέσεων, είναι ίση με την αρχική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου U_1.

Απάντηση:

i) Στην τελική θέση ισορροπίας, θέση (2), η ράβδος ισορροπεί. Αλλά τότε δέχεται τις δυνάμεις του διπλανού σχήματος, όπου N η αντίδραση του επιπέδου και T η τάση του νήματος. Από την ισορροπία της ράβδου παίρνουμε:

$$\vec{N}+\vec{w}_2+\vec{T}=0 \rightarrow \vec{T}=-\left(\vec{N}+\vec{w}_2\right)$$



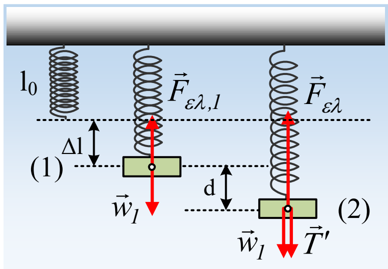
Αλλά αφού το βάρος και η N είναι κατακόρυφες δυνάμεις και η τάση του νήματος είναι επίσης κατακόρυφη.

Στο δεύτερο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ, όπου T΄ η τάση του νήματος δύναμη κατακόρυφη. Οπότε και πάλι, από την ισορροπία του Σ, προκύπτει ότι και η δύναμη του ελατηρίου είναι κατακόρυφη, συνεπώς και ο άξονας του ελατηρίου θα είναι κατακόρυφος.

ii) Από την ισορροπία της ράβδου στην τελική θέση (2) παίρνουμε:

ΣF=0 και Στ=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Τότε ως προς το άκρο Α, έχουμε:

$$T\cdot l\cdot συνθ - w_2\cdot\frac{1}{2}l\cdot συνθ=0 \rightarrow T=\frac{1}{2}Mg=mg$$



Παίρνουμε την ισορροπία στις θέσεις (1) και (2) του σώματος Σ:

$$ΣF_1=0 \rightarrow F_{ελ,1}=mg \rightarrow k\cdot Δl= mg \ (1)$$

$$ΣF_2= 0 \rightarrow F_{ελ}=mg+T΄ \rightarrow k\cdot(Δl+d) = mg+T \rightarrow k\cdot d =mg \ (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι d=Δl, όπου d η επιπλέον επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση (2).

Για τις δυναμικές ενέργειες του ελατηρίου έχουμε:

$$U_1 = \frac{1}{2}k\left(\Delta l\right)^2 \quad \text{και}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}k\left(\Delta l + d\right)^2 = \frac{1}{2}k4\left(\Delta l\right)^2 = 4\frac{1}{2}k\left(\Delta l\right)^2 = 4U_1$$

Σωστό το γ).

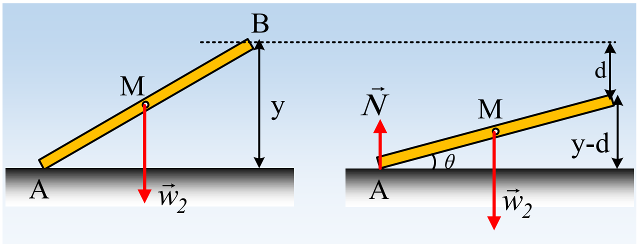
iii) Για την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας έχουμε:

Του σώματος Σ:

$$\Delta U_1 = U_{τελ} - U_{αρχ} = -mgh = -mg \cdot d = -\, mg \cdot \Delta l$$

Της ράβδου:

Ας θεωρήσουμε U=0 στο έδαφος. Αρχικά, όταν δένουμε τη ράβδο στο σώμα Σ, το άκρο Β βρίσκεται σε ύψος y από το έδαφος. Τότε το μέσον Μ της ράβδου βρίσκεται σε ύψος ½ y και η ράβδος έχει δυναμική ενέργεια:



$$U_{ρ,αρχ} = Mg \cdot h = 2mg \cdot \tfrac{1}{2}\, y = mgy$$

$$U_{ρ,τελ} = Mg \cdot h' = 2mg \cdot \tfrac{1}{2}\,(y-d) = mg(y-d) \rightarrow$$

$$\Delta U_2 = mg(y-d) - mgy = -\, mg \cdot d = -mg \cdot \Delta l$$

Ενώ παραπάνω βρήκαμε ότι η μεταβολή τη δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου είναι:

$$\Delta U_{ελ} = U_2 - U_1 = 4U_1 - U_1 = 3U_1 = 3\frac{1}{2}k\left(\Delta l\right)^2 = 1{,}5k\Delta l \cdot \Delta l = 1{,}5mg \cdot \Delta l$$

Συνεπώς η συνολική μεταβολή της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ των θέσεων (1) και (2), είναι:

$$\Delta E_{μηχ} = \Delta U_{ολ} = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_{ελ} \rightarrow$$

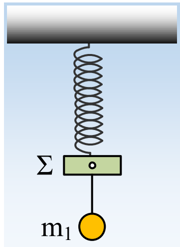
$$\Delta E_{μηχ} = -mg \cdot \Delta l - mg \cdot \Delta l + \frac{3}{2}mg \cdot \Delta l = -\frac{1}{2}mg \cdot \Delta l = -\frac{1}{2}k\left(\Delta l\right)^2 = -U_{ελ,αρχ}$$

Συνεπώς η απώλεια της μηχανικής ενέργειας λόγω αποσβέσεων, είναι:

$$\left|\Delta E_{μηχ}\right| = U_{ελ,αρχ} = \frac{1}{2}k\left(\Delta l\right)^2$$

Σχόλιο:

Η παραπάνω επεξεργασία μας δείχνει ότι το κρέμασμα της ράβδου, μέσω νήματος, είναι ισοδύναμη με το κρέμασμα ενός άλλου υλικού σημείου μάζας m_1= ½ Μ, οπότε αφήνουμε το σύστημα να εκτελέσει φθίνουσα ταλάντωση, πλάτους A=d=Δl.



Έτσι αν χρησιμοποιήσουμε λογική ταλάντωσης, η μηχανική ενέργεια η οποία μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας των αποσβέσεων είναι ίση με την αρχική ενέργεια ταλάντωσης, οπότε:

$$Q_\theta = E_{\tau\alpha\lambda,\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dd^2 = \frac{1}{2}k\left(\Delta l\right)^2 = U_{\varepsilon\lambda,\alpha\rho\chi}$$

dmargaris@gmail.com