

*Διονύσης Μάργαρης*

# Φυσική

## Γ' Λυκείου

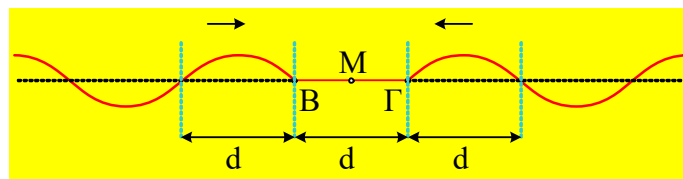


# Κύματα

## Ασκήσεις 2022-23

### 1) Συμβολή δύο κυμάτων

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδονται αντίθετα δύο όμοια εγκάρσια αρμονικά κύματα (ίδιο πλάτος ταλάντωσης και ίδιας συχνότητας) και σε μια στιγμή  $t=0$  έχουν φτάσει στα σημεία B και Γ, όπως στο σχήμα.



Για τη χρονική στιγμή  $t_1 = \frac{1}{2} T$ , όπου  $T$  η περίοδος του κύματος:

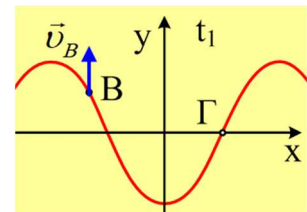
i) Για τα μέτρα των ταχυτήτων ταλάντωσης των σημείων B, Γ και M (το μέσον της BΓ) ισχύει:

$$\alpha) v_M > v_B = v_\Gamma, \quad \beta) v_M < v_B = v_\Gamma, \quad \gamma) v_M = v_B = v_\Gamma.$$

ii) Να σχεδιάσετε την μορφή  $y=f(x)$  της περιοχής πλάτους  $3d$ , όπου έχει σημειωθεί στο παραπάνω σχήμα.

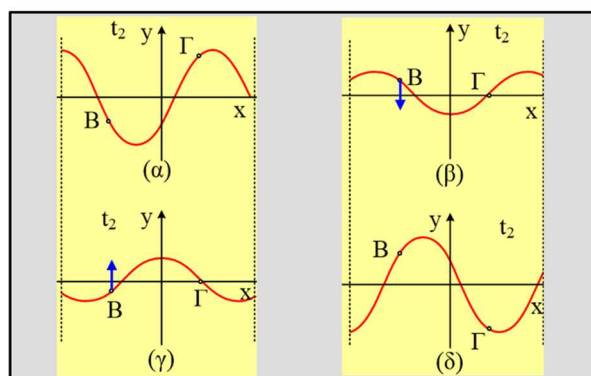
### 2) Ένα τμήμα από ένα στιγμιότυπο κύματος

Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια κυματομορφή σε ένα τμήμα ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, την χρονική στιγμή  $t_1$ , όπου το σημείο B έχει ταχύτητα ταλάντωσης προς τα πάνω, ενώ το σημείο Γ παρουσιάζει μηδενική απομάκρυνση.



i) Αν η παραπάνω κυματομορφή ανήκει σε τρέχον κύμα:

α) Να σχεδιάσετε την ταχύτητα του σημείου Γ, την στιγμή  $t_1$ , πάνω στο σχήμα.



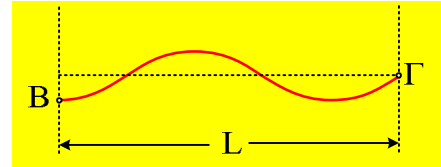
β) Ποιο από τα παραπάνω διαγράμματα (α) (β), (γ) και (δ) παρουσιάζει την ίδια περιοχή του μέσου την χρονική στιγμή  $t_2$ , αν  $\Delta t = t_2 - t_1 < \frac{1}{2} T$ , όπου  $T$  η περίοδος ταλάντωσης των σημείων του μέσου.

- ii) Αν η κυματομορφή που μας δόθηκε, παριστάνει ένα στάσιμο κύμα, ποιο από τα διαγράμματα (α), (β), (γ) και (δ) παρουσιάζει την ίδια περιοχή του μέσου την χρονική στιγμή  $t_2$ ;

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

### 3) Να βρεθεί πρώτα η εξίσωση του κύματος

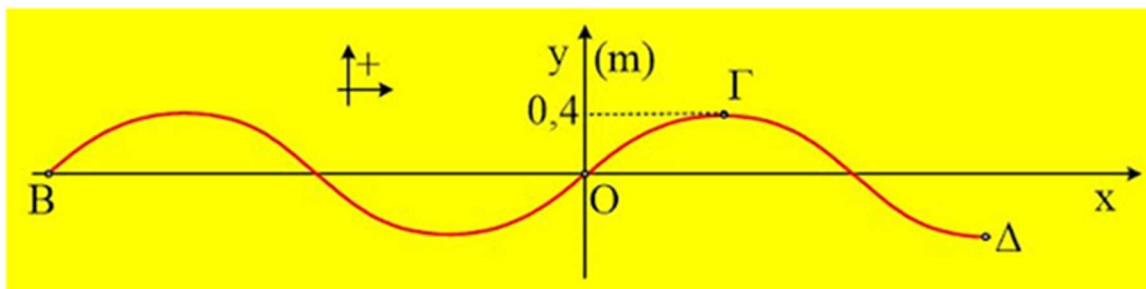
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα, προς την θετική κατεύθυνση (προς τα δεξιά) με πλάτος  $A=0,2\text{m}$  με συχνότητα  $f=1\text{Hz}$  και στο σχήμα δίνεται η μορφή ενός τμήματος ΒΓ του μέσου, μια στιγμή την οποία θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου ( $t_0=0$ ), όπου  $L=2,5\text{m}$ . Τη στιγμή αυτή η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Β είναι μηδενική.



- i) Αφού επιλέξετε την αρχή  $x=0$ , ενός προσανατολισμένου άξονα, να γράψετε την εξίσωση του κύματος για το παραπάνω κύμα.
- ii) Να σχεδιάσετε την μορφή του τμήματος ΒΓ, την χρονική στιγμή  $t_1=2,25\text{s}$ .

### 4) Κύματα σε ένα τμήμα χορδής

Στο σχήμα βλέπετε ένα τμήμα ενός γραμμικού ελαστικού μέσου (τμήμα μιας χορδής), μεταξύ των σημείων Β και Δ, κάποια χρονική στιγμή την οποία θεωρούμε  $t=0$ . Τη στιγμή αυτή τα σημεία Γ και Δ έχουν μηδενική ταχύτητα ταλάντωσης.



- i) Αν το κύμα είναι τρέχον και διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση (προς τα δεξιά) και το σημείο Ο, στη θέση  $x=0$ , θα φτάσει για πρώτη φορά σε απομάκρυνση  $0,4\text{m}$  τη χρονική στιγμή  $t_1=0,6\text{s}$ , ζητούνται:
- α) Να υπολογιστεί η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Ο, τη στιγμή  $t=0$ .
- β) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος για την ίδια περιοχή, τη χρονική στιγμή  $t_2=1\text{s}$ .
- γ) Να υπολογιστούν οι απομακρύνσεις και οι ταχύτητες των σημείων Β, Ο, Γ και Δ τη στιγμή  $t_2$ .
- ii) Αν το στιγμιότυπο της εικόνας ανήκει σε στάσιμο κύμα, με την ίδια συχνότητα, τη στιγμή  $t=0$ , να σχεδιαστεί το αντίστοιχο στιγμιότυπο την στιγμή  $t_2$ . Στο σχήμα να σημειωθούν οι ταχύτητες στα σημεία της περιοχής που έχουμε κοιλιές.

### 5) Μια χορδή και δύο στάσιμα κύματα.

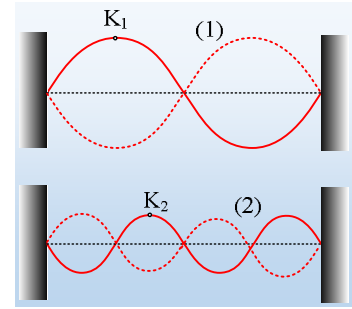
Σε μια τεντωμένη χορδή με σταθερά άκρα, έχει σχηματισθεί στάσιμο κύμα και στο (1) σχήμα δίνεται ένα στιγμιότυπό του. Μια στοιχειώδης μάζα  $dm$  στη θέση μιας κοιλίας  $K_1$  ταλαντώνεται με πλάτος  $A_1$ , αποκτώντας

μέγιστη κινητική ενέργεια  $E_1$ .

Στην ίδια χορδή (με το ίδιο τέντωμα), μπορεί να δημιουργηθεί ξανά στάσιμο κύμα αλλά το στιγμιότυπό του, να είναι όπως στο (2) σχήμα. Στην περίπτωση αυτή μια ίση στοιχειώδης μάζα  $dm$  στην θέση μιας κοιλίας  $K_2$ , ταλαντώνεται με πλάτος  $A_2 = \frac{1}{2} A_1$ , αποκτώντας μέγιστη κινητική ενέργεια  $E_2$ . Για το λόγο

$\frac{E_1}{E_2}$  ισχύει:

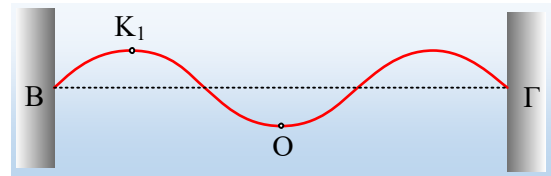
$$\alpha) \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{16}, \quad \beta) \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{4}, \quad \gamma) \frac{E_1}{E_2} = 1, \quad \delta) \frac{E_1}{E_2} = \frac{4}{1}$$



Να δικαιολογήστε την επιλογή σας.

### 6) Δύο στάσιμα κύματα ή δυο ταλαντώσεις μιας χορδής

Μια χορδή μήκους 3m είναι στερεωμένη στα άκρα της Β και Γ και πάνω της έχει σχηματισθεί ένα στάσιμο κύμα, όπου στο σχήμα βλέπουμε ένα στιγμιότυπό του, την στιγμή  $t=0$ , όπου η κοιλία  $K_1$  βρίσκεται σε απομάκρυνση  $y=0,2m$  με μηδενική τα-

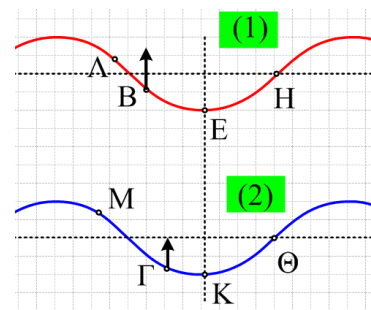


χύτητα ταλάντωσης. Η  $K_1$  φτάνει για πρώτη φορά στην θέση  $y=-0,2m$  την στιγμή  $t_1=1/3$  s.

- Να υπολογισθεί η κινητική ενέργεια μιας στοιχειώδους μάζας  $dm=2mg$  της χορδής, η οποία βρίσκεται στην θέση της κοιλίας  $K_1$ , την χρονική στιγμή  $t_2=5/6$ s.
- Πόση είναι η αντίστοιχη κινητική ενέργειας μιας ίσης μάζας τη χορδής την στιγμή  $t_2$ , η οποία βρίσκεται σε ένα σημείο Σ, δεξιά της κοιλίας  $K_1$  και σε απόσταση  $(K_1\Sigma)=d_1=1/3m$ .
- Ακίνητοποιούμε τη χορδή και την θέτουμε ξανά σε ταλάντωση, με τέτοια συχνότητα, ώστε να έχουμε το μεγαλύτερο δυνατόν μήκος κύματος. Στην περίπτωση αυτή, μόλις αποκατασταθεί μόνιμη κατάσταση, το μέσον Ο της χορδής ταλαντώνεται με πλάτος 0,2m. Να υπολογιστεί η συχνότητα ταλάντωσης καθώς και η μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να έχει μια στοιχειώδης μάζα  $dm=2mg$  της χορδής.

### 7) Δυο κύματα σε δυο όμοιες χορδές

Στο σχήμα βλέπετε στιγμιότυπα δύο κυματομορφών, σε δύο ίδια γραμμικά ελαστικά μέσα (δύο όμοιες χορδές), τα οποία ελήφθησαν την ίδια στιγμή  $t_1$ . Η μορφή (1) δείχνει τμήμα της πρώτης χορδής όταν πάνω της διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα, ενώ η (2), της δεύτερης χορδής, όπου πάνω της έχει σχηματισθεί ένα στάσιμο κύμα. Στο σχήμα επίσης φαίνεται η ταχύτητα ταλάντωσης δύο σημείων Β και Γ της χορδής.



- Το πλάτος του τρέχοντος κύματος (1) είναι ίσο με το πλάτος ταλάντωσης μιας κοιλίας Κ στο στάσιμο κύμα (2);
- Να σχεδιάσετε στο σχήμα τις ταχύτητες των σημείων Ε, Η της πρώτης χορδής και των σημείων Κ και Θ της δεύτερης με το στάσιμο κύμα, την στιγμή  $t_1$ . Να σχεδιάσετε επίσης τις ταχύτητες ταλάντωσης για

δύο σημεία Λ και Μ, αριστερότερα των Β και Γ, όπως στο σχήμα.

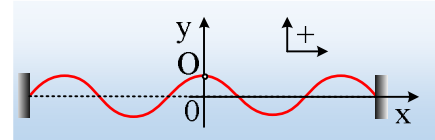
iii) Αν  $v_1$  το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ενός σημείου της πρώτης χορδής, στην διάρκεια της ταλάντωσής του και  $v_2$  το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας μιας κοιλίας της δεύτερης χορδής, θα ισχύει:

$$\alpha) v_1 < v_2, \quad \beta) v_1 = v_2, \quad \gamma) v_1 > v_2.$$

iv) Να σχεδιάσετε αντίστοιχο σχήμα που να εμφανίζονται ξανά τα δύο στιγμιότυπα (για τις ίδιες περιοχές), μετά από χρόνο  $\Delta t = \frac{1}{4} T$ , όπου  $T$  η περίοδος του τρέχοντος κύματος.

### 8) Το στάσιμο κύμα σε μια χορδή

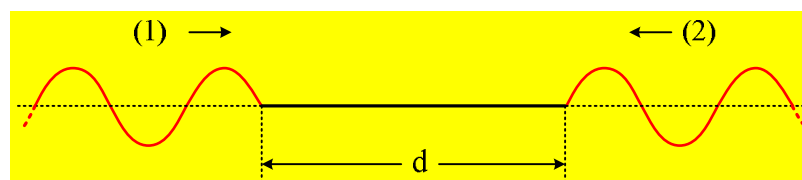
Πάνω στην χορδή του σχήματος, μήκους  $l=1\text{m}$ , με σταθερά τα δυο άκρα της, έχει σχηματισθεί ένα στάσιμο κύμα και στο σχήμα βλέπετε την μορφή της χορδής, μια στιγμή  $t=0$ , όπου η κοιλία στο σημείο Ο, βρίσκεται σε μέγιστη απομάκρυνση. Αν το σημείο Ο αποκτά μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα  $0,628\text{m/s}$  τη χρονική στιγμή  $t_1=0,05\text{s}$ , για πρώτη φορά, ζητούνται:



- Η ταχύτητα διάδοσης ενός (τρέχοντος) κύματος πάνω στην χορδή αυτή.
- Να γραφούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης ( $y=f(t)$ ) και της ταχύτητας του σημείου Ο ( $v=f(t)$ ) σε συνάρτηση με τον χρόνο, θεωρώντας τον προσανατολισμό που δίνεται στο σχήμα.
- Θεωρώντας την θέση του σημείου Ο, σαν αρχή ενός συστήματος αξόνων  $x,y$ , όπως στο σχήμα:
  - Πόσα ακόμη σημεία ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος με το Ο;
  - Ποια η εξίσωση  $y=f(x,t)$  για το στάσιμο κύμα το οποίο έχει δημιουργηθεί πάνω στην χορδή;
  - Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για ένα σημείο της χορδής Σ, το οποίο βρίσκεται στην θέση  $x=-0,2\text{m}$ .
  - Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο ( $y=f(t)$ ), για τα σημεία Σ και Ο της χορδής, στους ίδιους άξονες.

### 9) Δύο τρέχοντα κύματα και ένα στάσιμο

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις, δύο αρμονικά κύματα, με πλάτη  $A=0,2\text{m}$ , μήκη κύματος  $\lambda=1\text{m}$  και συχνότητα  $f=2\text{Hz}$ , όπως στο σχήμα:



Τη χρονική στιγμή  $t_0=0$ , τα μέτωπα των δύο κυμάτων απέχουν απόσταση  $d=2\text{m}$ .

- Αν τα δύο κύματα συναντώνται σε ένα σημείο Ο του μέσου, ενώ στη συνέχεια έχουμε δημιουργία στάσιμου κύματος πάνω στο ελαστικό μέσο, τότε στο σημείο Ο θα δημιουργηθεί δεσμός ή κοιλία; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- Παίρνοντας το σημείο Ο σαν αρχή ενός συστήματος αξόνων  $x,y$  με θετικές κατευθύνσεις προς τα δεξιά

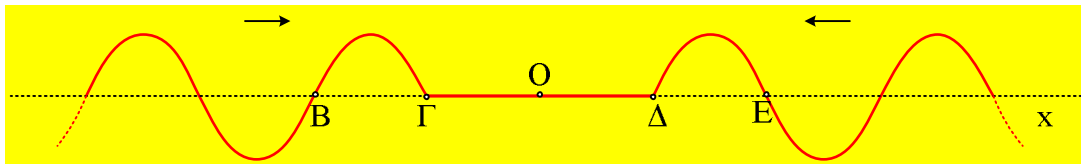
και προς τα πάνω, να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κυμάτων (1) και (2).

iii) Να βρείτε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται μετά την συμβολή των δύο κυμάτων.

iv) Να σχεδιάσετε την μορφή του μέσου  $y=f(x)$ , την χρονική στιγμή  $t=1,125s$ .

### 10) Η συμβολή και τα ακίνητα σημεία

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται αντίθετα δυο αρμονικά κύματα με πλάτη  $A$ , μήκη κύματος  $\lambda$  και περίοδο  $T$  και σε μια στιγμή  $t=0$ , τα κύματα φτάνουν στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ , όπου  $(\Gamma\Delta)=\lambda$ .



i) Να σχεδιάσετε πάνω στο σχήμα τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων  $B$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$  και  $E$  στην παραπάνω εικόνα.

ii) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_1=T$ .

Για τη στιγμή αυτή:

α) Ποια η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου  $O$ , στο μέσον της  $\Gamma\Delta$ ;

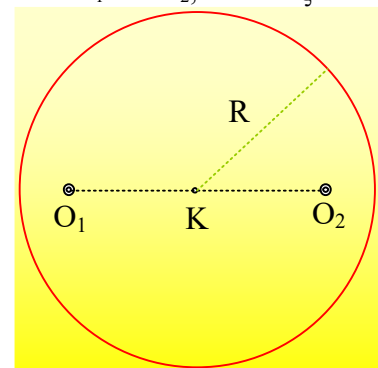
β) Μεταξύ των σημείων  $B$  και  $E$  του μέσου, το πλήθος των σημείων τα οποία έχουν μηδενική ταχύτητα ταλάντωσης είναι:

a) Δύο, b) Τέσσερα, c) Έξι, d) Άπειρα.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας

### 11) Η συμβολή και σημεία ενός κύκλου

Στην επιφάνεια ενός υγρού σε ηρεμία, βρίσκονται δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων  $O_1$  και  $O_2$ , οι οποίες ταλαντώνονται με πλάτος  $A$ , παράγοντας κύματα τα οποία διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με μήκος κύματος  $\lambda$ . Η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών είναι  $d=1,5\lambda$ . Με κέντρο το μέσον  $K$  της απόστασης των δύο πηγών, φανταζόμαστε κύκλο με ακτίνα  $R=\lambda$ .



i) Τα σημεία του κύκλου στα οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή (δεχόμενοι σταθερό πλάτος των κυμάτων, ταλαντώνονται με πλάτος  $2A$ ) είναι:

α)  $n=2$ , β)  $n=3$ , γ)  $n=6$ , δ)  $n=8$

ii) Τα σημεία του κύκλου που παραμένουν ακίνητα είναι:

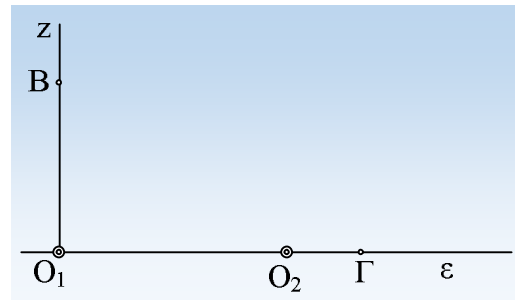
α)  $n=3$ , β)  $n=4$ , γ)  $n=6$ , δ)  $n=8$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

### 12) Επιφανειακή συμβολή από σύγχρονες πηγές

Σε δύο σημεία μιας ευθείας  $\epsilon$ , στην επιφάνεια ενός υγρού, βρίσκονται δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων  $O_1$  και  $O_2$  οι οποίες αρχίζουν να ταλαντώνονται τη στιγμή  $t_0=0$ , παράγοντας εγκάρσια κύματα με πλάτος  $A=2cm$ ,

μήκος κύματος  $\lambda=0,8\text{m}$  και συχνότητα  $f=0,5\text{Hz}$ . Η απόσταση των δύο πηγών είναι  $d=0,8\text{m}$ .



- i) Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης τις σημείου B τις επιφάνειας, το οποίο βρίσκεται πάνω στην ευθεία z, η οποία είναι κάθετη στην  $\epsilon$ , στο σημείο που βρίσκεται η πηγή  $O_1$ , σε απόσταση  $(O_1B)=0,6\text{m}$ , τις χρονικές στιγμές:

α)  $t_1=1\text{s}$ , β)  $t_2=2\text{s}$  και γ)  $t_3=3\text{s}$ .

- ii) Ποια η αντίστοιχη απάντηση για ένα σημείο Γ της ευθείας  $\epsilon$ , αν  $(O_2\Gamma)=0,2\text{m}$ ;  
 iii) Αν, ενώ έχουμε συμβολή σε όλα τα σημεία της επιφάνειας, το σημείο Γ μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά x, τότε το πλάτος ταλάντωσής του:

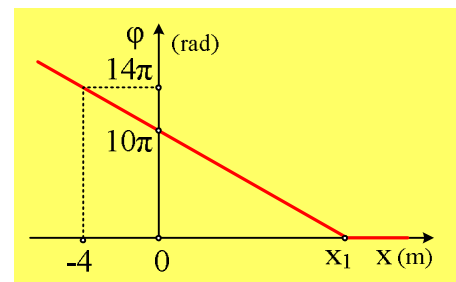
- α) θα αυξηθεί, β) θα μειωθεί, γ) θα παραμείνει σταθερό.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Θεωρούμε ότι τα κύματα που διαδίδονται, διατηρούν σταθερό πλάτος.

### 13) Από ένα διάγραμμα φάσης

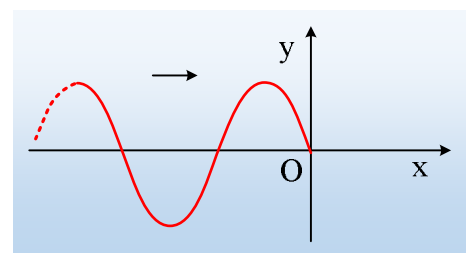
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό πλάτους  $A=0,2\text{m}$  και στο σχήμα δίνεται το διάγραμμα της φάσης της απομάκρυνσης των διαφόρων σημείων του μέσου, σε συνάρτηση με την θέση  $x$  ( $\varphi=f(x)$ ) τη χρονική στιγμή  $t_1$ .



- i) Το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά (θετική φορά του άξονα) ή προς τα αριστερά;  
 ii) Να υπολογίσετε το μήκος του κύματος καθώς και την θέση  $x_1$ , όπου μηδενίζεται η φάση τη στιγμή  $t_1$ .  
 iii) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της φάσης ( $\varphi=f(x)$ ) την χρονική στιγμή  $t_2=t_1+T$ , όπου T η περίοδος ταλάντωσης των σημείων του μέσου.  
 iv) Αν το κύμα ικανοποιεί την εξίσωση  $y=A\cdot\eta\mu 2\pi(t/T-x/\lambda)$  να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος την στιγμή  $t_1$ , αν  $T=1\text{s}$ .  
 v) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης  $y=f(t)$  για ένα σημείο Σ, στην θέση  $x=-4\text{m}$ , μέχρι την στιγμή  $t_1$ .

### 14) Η φάση και σημεία με μέγιστη ταχύτητα

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, προς τα δεξιά (θετική κατεύθυνση) και τη στιγμή  $t=0$  φτάνει στο σημείο O, στη θέση  $x=0$ . Το σημείο O ξεκινά την ταλάντωσή κινούμενο προς τα πάνω (θετική φορά) και φτάνει στην ακραία θέση του, σε απόσταση  $0,2\text{m}$  σε χρονικό διάστημα  $\Delta t=0,5\text{s}$ , ενώ στο μεταξύ το κύμα έχει διαδοθεί φτάνοντας στο σημείο Λ, όπου



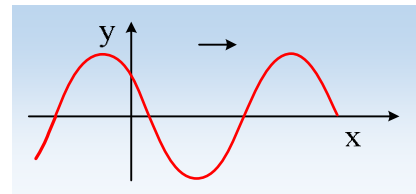
(ΟΛ)=1m.

- i) Να υπολογισθεί η ταχύτητα διάδοσης του κύματος, καθώς και η εξίσωση του κύματος.
- ii) Να βρεθεί η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου K, στη θέση  $x_1=-1\text{m}$ , σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση για  $t \leq 2,5\text{s}$ .
- iii) Να βρεθούν οι θέσεις των σημείων, τα οποία τη στιγμή  $t_1=2,5\text{s}$  έχουν μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα ταλάντωσης, στην περιοχή  $-2\text{m} \leq x \leq 2\text{m}$ .
- iv) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_2=3\text{s}$ .
- v) Να βρεθεί η θέση του σημείου Σ του μέσου, το οποίο την στιγμή  $t_3=6,5\text{s}$  έχει πραγματοποιήσει 43,5 ταλαντώσεις.

Θεωρούμε ότι η πηγή είναι σε μεγάλη απόσταση από την αρχή O ( $x=0$ ) του άξονα.

### 15) Η διάδοση του παλμού και η ταλάντωση ενός σημείου

Κατά μήκος ενός ελαστικού μέσου και προς την θετική κατεύθυνση διαδίδεται ένα εγκάρσιο κύμα (στην πραγματικότητα ένας κυματικός αρμονικός παλμός) με μήκος κύματος  $\lambda=0,8\text{m}$  και τη στιγμή  $t=0$ , φτάνει σε ένα σημείο O, το οποίο λαμβάνουμε και σαν αρχή του προσανατολισμένου άξονα x. Το κύμα φτάνει την στιγμή  $t_1=3\text{s}$  σε ένα σημείο B του μέ-

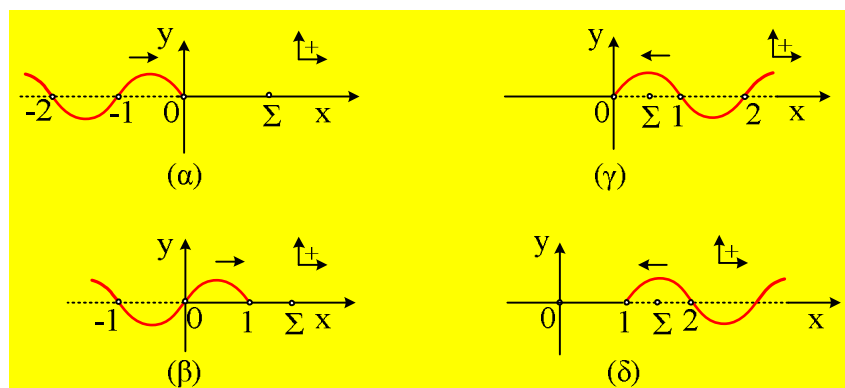


σου, στην θέση  $x_1=1,2\text{m}$ , το οποίο αρχίζει να ταλαντώνεται με πλάτος  $A=0,2\text{m}$ , ξεκινώντας την ταλάντωση του από την θέση ισορροπίας του και κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση. Το σημείο B, παύει να ταλαντώνεται, παραμένοντας ακίνητο, την χρονική στιγμή  $t_2=12\text{s}$ .

- i) Να βρεθεί η ταχύτητα διάδοσης του κύματος και η περίοδος ταλάντωσης των σημείων του μέσου.
- ii) Ποια η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο του σημείου B; Να γίνει η γραφική παράσταση  $y_1=f(t)$  για το σημείο B και για όσο χρόνο αυτό ταλαντώνεται.
- iii) Να γίνει επίσης η αντίστοιχη γραφική παράσταση για την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου B,  $v=f(t)$ .
- iv) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος την χρονική στιγμή  $t_3=10\text{s}$ .

### 16) Βρείτε την εξίσωση του κύματος

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται ένα κύμα πλάτους  $A=0,2\text{m}$  με περίοδο 3s.





Ζητάμε την εξίσωση του κύματος, στις περιπτώσεις που εμφανίζονται στο παρακάτω σχήμα, όπου τα στιγμιότυπα (α) και (β) αναφέρονται σε κύματα που διαδίδονται προς τα δεξιά (προς την θετική κατεύθυνση), ενώ τα (γ) και (δ) προς τα αριστερά, ενώ όλα τα στιγμιότυπα αναφέρονται στην στιγμή  $t=0$ .

### 17) Ένα αρμονικό κύμα και ένα υλικό σημείο

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση ένα αρμονικό κύμα, πλάτους  $A=0,4\text{m}$  με ταχύτητα  $2\text{m/s}$ . Την χρονική στιγμή  $t=0$ , το κύμα φτάνει στην αρχή  $O$  ενός προσανατολισμένου άξονα, το οποίο αρχίζει να ταλαντώνεται, κινούμενο προς τα πάνω (θετική απομάκρυνση) με περίοδο  $T=2\text{s}$ .

- Να γράψετε την εξίσωση του διαδιδόμενου κύματος.
- Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος την χρονική στιγμή  $t_1=4,5\text{s}$ .
- Ένα υλικό σημείο  $\Sigma$  του μέσου, με μάζα  $m=1\text{g}$ , βρίσκεται στην θέση  $x_1=20/3\text{m}$ . Να υπολογίσετε την ταχύτητα του  $\Sigma$  και την συνισταμένη δύναμη που δέχεται από το μέσον, τις χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_2=2,8\text{s}$ .

### 18) Όταν αλλάζουν τα πράγματα στην πορεία

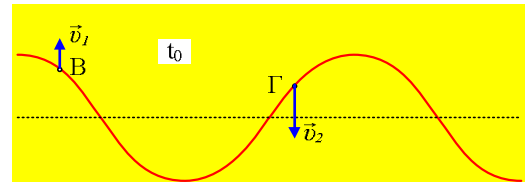
Στη θέση  $x=0$  ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, υπάρχει πηγή κύματος η οποία αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή  $t=0$ , με εξίσωση  $y=0,4\eta\mu(2\pi t)$  (μονάδες στο S.I.), δημιουργώντας εγκάρσια κύματα που διαδίδονται προς την θετική κατεύθυνση του μέσου, με ταχύτητα  $v=2\text{m/s}$ . Την χρονική στιγμή  $t_1=3\text{s}$ , η πηγή αλλάζει πλάτος ταλάντωσης στην τιμή  $A_2=0,2\text{m}$ , ενώ και η συχνότητά της γίνεται  $f_2=2\text{Hz}$ .

- Να γράψετε τις εξισώσεις για το κύμα που διαδίδεται κατά μήκος του παραπάνω μέσου.
- Ένα σημείο  $\Sigma$  βρίσκεται στην θέση  $x_\Sigma=3\text{m}$ . Ποια η εξίσωση της απομάκρυνσης  $y_\Sigma=f(t)$  του σημείου αυτού; Να γίνει η γραφική παράσταση της  $y_\Sigma=f(t)$ , μέχρι την στιγμή  $t_2=6\text{s}$ .
- Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος  $y=f(x)$  την χρονική στιγμή  $t_2=6\text{s}$ .

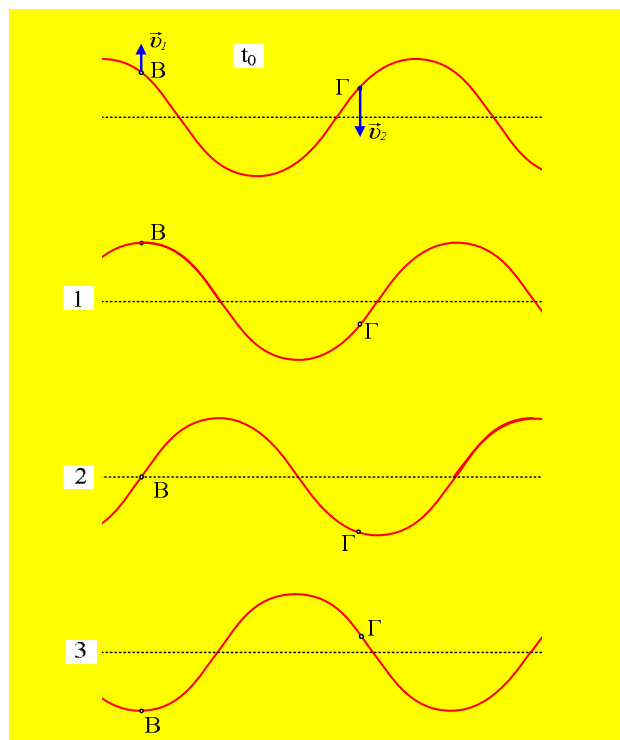
## Ασκήσεις 2017-19

### 19) Πληροφορίες από ένα στιγμιότυπο

Στο διπλανό σχήμα βλέπετε μια περιοχή ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, στην οποία έχουμε μια κυματική αρμονική διαταραχή, κάποια χρονική στιγμή  $t_0$ . Στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι ταχύτητες ταλάντωσης δύο σημείων Β και Γ του μέσου, τη στιγμή αυτή.



- i) Το στιγμιότυπο αυτό ανήκει σε τρέχον ή στάσιμο κύμα;
- ii) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τρία άλλα στιγμιότυπα του μέσου κάποιες επόμενες χρονικές στιγμές, μικρότερες της περιόδου.



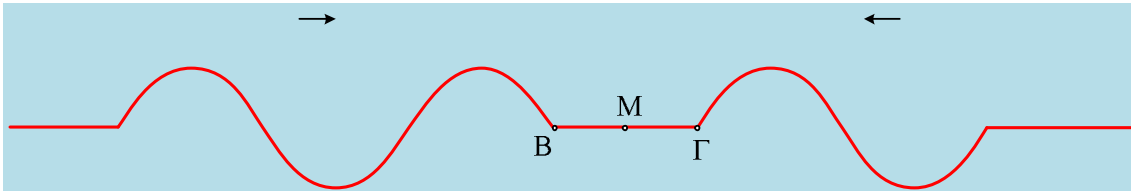
- a) Ποιο στιγμιότυπο αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή  $t_1 = t_0 + 5T/12$ ;
- β) Να σημειωθούν πάνω στο σχήμα οι ταχύτητες των σημείων Β και Γ και στα τρία στιγμιότυπα.
- γ) Αν τη στιγμή  $t_0$  η φάση της απομάκρυνσης του σημείου Β είναι ίση με  $4,2\pi$  (rad) τότε η φάση του σημείου Γ την ίδια στιγμή έχει τιμή:

$$\gamma_1) 5,6\pi \text{ (rad)} \quad \gamma_2) 4,2\pi \text{ (rad)}, \quad \gamma_3) 3,2\pi \text{ (rad)}, \quad \gamma_4) 2,8\pi \text{ (rad)}$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

### 20) Δύο αρμονικοί παλμοί συμβάλουν

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται αντίθετα δυο ημιτονοειδείς παλμοί με πλάτη  $A=0,2\text{m}$  και με ταχύτητα  $v=1\text{m/s}$  και σε μια στιγμή  $t=0$  η μορφή του μέσου είναι όπως στο σχήμα, όπου  $(B\Gamma)=1\text{m}$ :

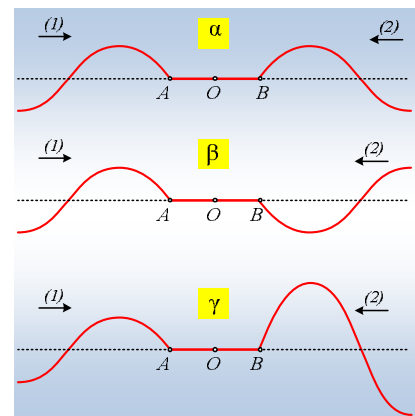


Τη στιγμή αυτή το σημείο B έχει ταχύτητα ταλάντωσης  $v_1=0,2\pi$  m/s.

- i) Να σχεδιάσετε πάνω στο σχήμα τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων B και Γ.
- ii) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_1=1\text{s}$ .
  - α) Πόση είναι η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του και ποια η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου M, στο μέσον της BΓ;
  - β) Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων B και Γ και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.
- iii) Ποιες θα ήταν οι αντίστοιχες απαντήσεις σας για τη χρονική στιγμή  $t_2=1,5\text{s}$ ;

### 21) Δύο κύματα που διαδίδονται αντίθετα

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται αντίθετα δύο αρμονικά κύματα με το ίδιο μήκος κύματος και στα διπλανά σχήματα έχουμε πάρει στιγμιότυπα τη στιγμή που τα κύματα έχουν φτάσει στα σημεία A και B του ελαστικού μέσου.

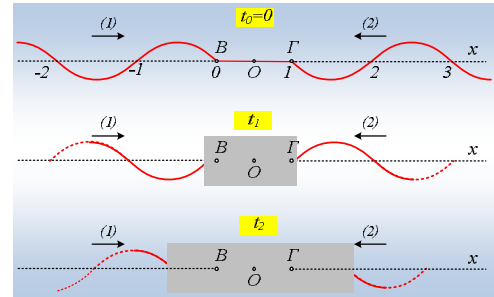


- i) Να εξηγήσετε γιατί τα δυο κύματα θα συμβάλουν στο μέσον O του τμήματος AB.
- ii) Στο σχήμα α, όπου τα δυο κύματα έχουν το ίδιο πλάτος τι θα προκύψει μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο O;
  - α) Θα σχηματισθεί δεσμός, β) θα σχηματισθεί κοιλία του στάσιμου, γ) τίποτα από τα δύο.
- iii) Ποια η αντίστοιχη απάντηση για τα κύματα του σχήματος β, επίσης ίδιου πλάτους;
- iv) Στο σχήμα γ, το πλάτος του κύματος (2) είναι διπλάσιο από το αντίστοιχο πλάτος του (1) κύματος ( $A_2=2A_1=2\cdot A$ ). Να εξετασθεί αν σχηματισθεί στάσιμο κύμα μετά την συμβολή των δύο κυμάτων.

Να δικαιολογήσετε αναλυτικά τις απαντήσεις σας.

### 22) Μια συμβολή και ένα στάσιμο χωρίς εξισώσεις

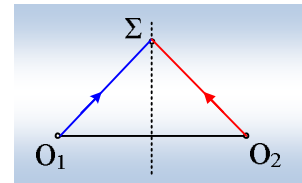
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδονται αντίθετα δύο κύματα, με το ίδιο μήκος κύματος και ίδιο πλάτος  $A=0,1\text{m}$ , με ταχύτητα  $v=1\text{m/s}$ . Στο διπλανό σχήμα βλέπετε τη μορφή του μέσου τη στιγμή  $t_0=0$ , όπου τα δυο κύματα φτάνουν στα σημεία Β και Γ.



- Να σημειωθούν πάνω στο σχήμα οι ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων Β και Γ, στις θέσεις  $x_B=0$  και  $x_\Gamma=1\text{m}$  και να υπολογιστούν τα μέτρα τους τη στιγμή  $t_0=0$ .
- Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_1=1\text{s}$ , σημειώνοντας επίσης στο σχήμα τις ταχύτητες των σημείων Β, Γ καθώς και του μέσου Ο του ευθύγραμμου τμήματος, στη θέση  $x_0=0,5\text{m}$ . Με ποιες μορφές εμφανίζεται η ενέργεια, την οποία μεταφέρουν τα δυο κύματα, στο τμήμα ΒΓ;
- Ποια η αντίστοιχη απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα, τη χρονική στιγμή  $t_2=1,5\text{s}$ ;

### 23) Δυο πηγές που δεν ξεκίνησαν ταυτόχρονα

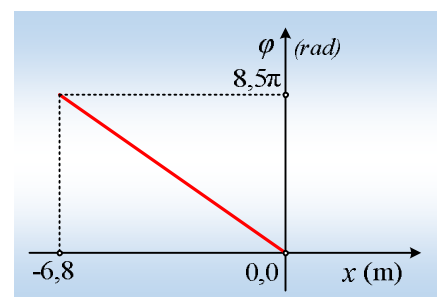
Στην επιφάνεια ενός υγρού βρίσκονται δυο πηγές κύματος  $O_1$  και  $O_2$ , οι οποίες μπορούν να ταλαντώνονται σε κατακόρυφη διεύθυνση με το ίδιο πλάτος  $A$  και με περίοδο  $T=2\text{s}$ . Κάποια στιγμή  $t_0=0$ , η πηγή  $O_1$  αρχίζει την ταλάντωσή της, με εξίσωση απομάκρυνσης  $y_{O1}=A\cdot\eta\mu(\pi t)$ , οπότε δημιουργείται ένα κύμα το οποίο φτάνει στο σημείο Σ της μεσοκαθέτου του  $O_1O_2$ , τη στιγμή  $t_1=4\text{s}$  και το θέτει σε ταλάντωση με πλάτος πλάτος  $A_1=0,1\text{m}$ .



- Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης για την ταλάντωση του σημείου Σ, εξαιτίας του κύματος αυτού.
- Η πηγή  $O_2$  καθυστέρησε κατά  $\Delta t=4,5\text{s}$  να ξεκινήσει μια όμοια ταλάντωση με την πηγή  $O_1$  και να δημιουργήσει ένα δεύτερο κύμα που διαδίδεται στην επιφάνεια του υγρού.
  - Ποια χρονική στιγμή το 2<sup>ο</sup> κύμα θα φτάσει στο σημείο Σ και ποια η εξίσωση της απομάκρυνσης του Σ, εξαιτίας του κύματος αυτού, σε συνάρτηση με το χρόνο;
  - Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης  $y=f(t)$  του σημείου Σ εξαιτίας και των δύο παραπάνω κυμάτων.
- Θέλοντας να μελετήσουμε τη σύνθετη ταλάντωση, μπορούμε να θεωρήσουμε ως  $t_0=0$ , τη στιγμή που άρχισε η ταλάντωση αυτή του Σ. Με την υπόθεση αυτή, να γράψετε νέες εξισώσεις για τις δυο επιμέρους ταλαντώσεις καθώς και την εξίσωση της απομάκρυνσης του Σ λόγω συμβολής.

### 24) Ένα κύμα και το διάγραμμα της φάσης

Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και στο διάγραμμα δίνεται η φάση της απομάκρυνσης των σημείων του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_1=3,4\text{s}$ , όπου τη στιγμή  $t_0=0$  ξεκίνησε η πηγή του κύματος, την ταλάντωσή της.

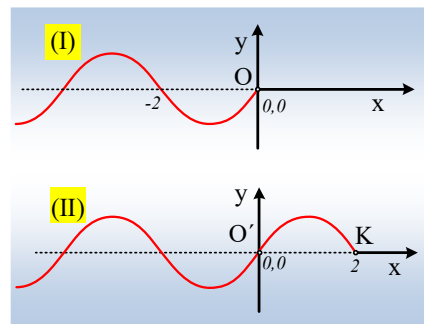


- Το κύμα αυτό διαδίδεται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά και γιατί;

- ii) Να βρεθεί η περίοδος και το μήκος του κύματος.
- iii) Ποια είναι η εξίσωση του κύματος, αν το πλάτος του είναι  $0,2\text{m}$ ;
- iv) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος την στιγμή  $t_1$ .
- v) Να γίνει η γραφική παράσταση της φάσης της απομάκρυνσης του σημείου O, στη θέση  $x=0$ , σε συνάρτηση με το χρόνο.

### 25) Δύο κύματα με την ίδια εξίσωση κύματος.

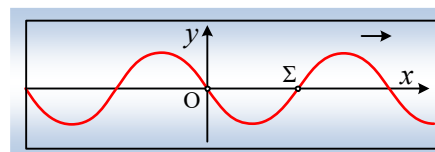
Κατά μήκος δύο γραμμικών ελαστικών μέσων και από αριστερά προς τα δεξιά (θετική κατεύθυνση) διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος  $A=0,2\text{m}$  και την ίδια ταχύτητα διάδοσης  $v=2\text{m/s}$ . Τη στιγμή  $t_0=0$ , το πρώτο κύμα (I) φτάνει στο σημείο O, στη θέση  $x=0$ , ενώ το δεύτερο (II) στο σημείο K, στη θέση  $x=2\text{m}$ , όπως παρουσιάζονται στο διπλανό σχήμα.



- i) Να υπολογιστεί η περίοδος ταλάντωσης των σημείων των δύο μέσων.
- ii) Ποια η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για την ταλάντωση που πρόκειται να ξεκινήσουν τα σημεία O και K, στα οποία φτάνουν τα δύο κύματα, με δεδομένο ότι η προς τα πάνω κατεύθυνση θεωρείται θετική;
- iii) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων.
- iv) Ποια η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, του σημείου O' στη θέση  $x=0$ , του δεύτερου κύματος;

### 26) Ένα κύμα σε άπειρο μέσον

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, πολύ μεγάλου μήκους, διαδίδεται από αριστερά προς τα δεξιά (θετική φορά) ένα αρμονικό κύμα, πλάτους  $A=0,2\text{m}$  και μήκους κύματος  $\lambda=2\text{m}$ , με ταχύτητα  $v=1\text{m/s}$ . Στο διπλανό σχήμα βλέπετε ένα «παραθύρο» που μας επιτρέπει να βλέπουμε μια μικρή περιοχή του κύματος (το οποίο έχει διαδοθεί πολύ πέρα του δεξιού άκρου του παραθύρου). Για να γράψουμε εξίσωση για το κύμα αυτό, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων  $x,y$  με αρχή το σημείο O και θεωρούμε επίσης τη στιγμή που έχουμε το παραπάνω στιγμιότυπο, ως αρχή μέτρησης των χρόνων ( $t_0=0$ ).

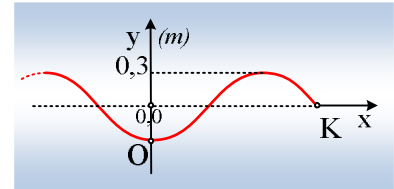


- i) Να γράψετε την εξίσωση που περιγράφει το παραπάνω κύμα.
- ii) Ποια η φάση της απομάκρυνσης των σημείων O και Σ τη στιγμή  $t_0=0$ ;
- iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της φάσης της απομάκρυνσης του σημείου Σ σε συνάρτηση με το χρόνο ( $\phi=f(t)$ ).
- iv) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_1=7,5\text{s}$ , για την ίδια περιοχή του μέσου.

- v) Να παραστήσετε επίσης γραφικά την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Σ σε συνάρτηση με το χρόνο, από  $t_0$  έως  $t_1$ .

### 27) Ένα κύμα και οι φάσεις της απομάκρυνσης σημείων

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου που ταυτίζεται με έναν προσανατολισμένο άξονα  $x$  και από αριστερά προς τα δεξιά (προς τη θετική κατεύθυνση), διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα. Η εικόνα του μέσου τη στιγμή  $t=0$ , είναι αυτή του διπλανού σχήματος, όπου το κύμα έχει φτάσει στο σημείο Κ, στη θέση  $x=1,5\text{m}$ .



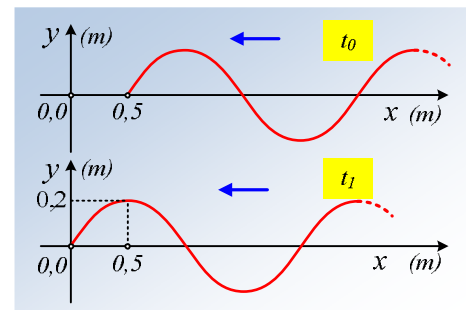
Αν η επιτάχυνση, τη στιγμή αυτή, του σημείου Ο, στη θέση  $x=0$ , είναι ίση με  $12\text{m/s}^2$ , ζητούνται:

- Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο ( $y=y(t)$ ) των σημείων Κ και Ο.
- Η εξίσωση του κύματος.
- Η φάση της απομάκρυνσης του σημείου Κ, σε συνάρτηση με το χρόνο και να παρασταθεί γραφικά.
- Η γραφική παράσταση της φάσης του σημείου Ο, σε συνάρτηση με το χρόνο.
- Η γραφική παράσταση της φάσης των διαφόρων σημείων του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_1=3,5\text{s}$ .

Δίνεται  $\pi^2 \approx 10$ .

### 28) Αν το κύμα οδεύει προς τα αριστερά.

Σε γραμμικό ελαστικό μέσο και από τα δεξιά προς τ' αριστερά (προς την αρνητική κατεύθυνση) διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα με στιγμιότυπο τη στιγμή  $t_0=0$ , όπως στο πρώτο από τα διπλανά διαγράμματα. Το αντίστοιχο στιγμιότυπο τη στιγμή  $t_1=0,5\text{s}$  είναι όπως στο δεύτερο διάγραμμα.

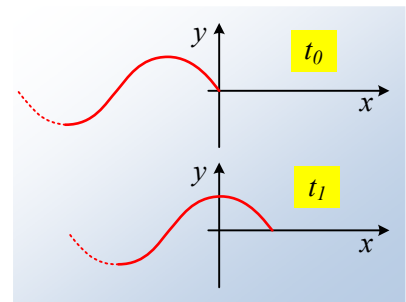


- Χρησιμοποιώντας πληροφορίες από τα διαγράμματα αυτά να βρείτε:
  - το πλάτος και το μήκος του κύματος,
  - τη συχνότητα και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- Ποια η εξίσωση του κύματος;
- Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_2=2,5\text{s}$  και μέχρι τη θέση  $x_B=2,5\text{m}$  στον θετικό ημιάξονα.
- Για το σημείο Β, στη θέση  $x_B=2,5\text{m}$ :
  - Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο ( $y-t$ ) και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
  - Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Β, σε συνάρτηση με το

χρόνο.

### 29) Ένα οδεύον προς τα δεξιά κύμα

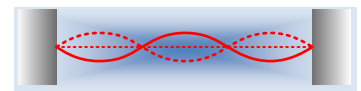
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από τα αριστερά προς τα δεξιά διαδίδεται χωρίς απώλειες ένα αρμονικό κύμα, το οποίο τη στιγμή  $t_0=0$  φτάνει σε ένα σημείο O, το οποίο λαμβάνουμε ως αρχή ενός προσανατολισμένου άξονα x, με την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική. Το σημείο O ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα πάνω (θετική φορά του άξονα y) και φτάνει σε μέγιστη απομάκρυνση 0,2m τη στιγμή  $t_1=0,2s$ . Το κύμα φτάνει σε ένα σημείο K, στη θέση  $x_K=x_2=3,5m$  τη χρονική στιγμή  $t_2=1,4s$ .



- i) Να γράψετε τις εξισώσεις για την απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο, για τις ταλαντώσεις που θα εκτελέσουν τα σημεία O και K.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- iii) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή  $t_2$  που το κύμα φτάνει στο σημείο K και για την περιοχή του θετικού ημιάξονα. Ποια η απομάκρυνση του σημείου O την παραπάνω χρονική στιγμή;
- iv) Ένα σημείο Λ, βρίσκεται στη θέση  $x_\Lambda=4/3$  m.
  - α) Να βρεθούν η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Λ τη στιγμή  $t_2$ .
  - β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Λ και για το χρονικό διάστημα από 0- $t_2$ .

### 30) Ένα στάσιμο κύμα και η εξίσωσή του

Πάνω σε μια χορδή, με σταθερά τα δυο της άκρα, έχει σχηματισθεί ένα στάσιμο κύμα με πλάτος 0,2m. Παίρνοντας το αριστερό άκρο της χορδής ως αρχή



ενός άξονα x, η εξίσωση του στάσιμου μπορεί να πάρει μια ή περισσότερες από τις παρακάτω μορφές (μονάδες στο S.I.):

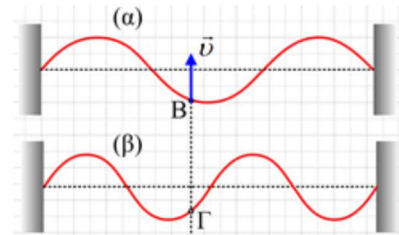
- i)  $y=0,2 \cdot \sin(4\pi x) \cdot \eta\mu(\pi t)$
- ii)  $y=0,2 \cdot \sin(\pi t) \cdot \eta\mu(4\pi x)$
- iii)  $y=0,2 \cdot \sin(\pi t + \varphi_0) \cdot \eta\mu(4\pi x)$
- iv)  $y=0,2 \cdot \sin(4\pi x) \cdot \eta\mu(\pi t + \varphi_0)$
- v)  $y=0,2 \cdot \sin(4\pi t) \cdot \eta\mu(\pi t)$
- vi)  $y=0,2 \cdot \eta\mu(4\pi x) \cdot \eta\mu(\pi x)$

Ποιες εξισώσεις μπορούν να περιγράψουν το στάσιμο κύμα στη χορδή;

Να δικαιολογήσετε την απόρριψη των λανθασμένων εξισώσεων (να μην δικαιολογηθούν οι σωστές...)

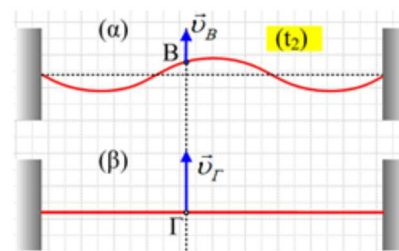
### 31) Δύο στάσιμα κύματα

Σε δύο απολύτως όμοιες τεντωμένες χορδές έχουν δημιουργηθεί στάσιμα κύματα και στο σχήμα φαίνονται οι μορφές των χορδών κάποια στιγμή  $t_1$ . Τη στιγμή αυτή το σημείο B κινείται προς τα πάνω ενώ το σημείο Γ έχει μηδενική ταχύτητα ταλάντωσης.



Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.

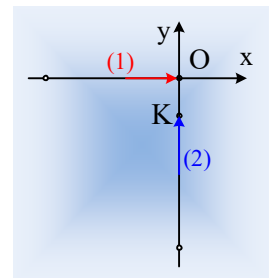
- Τα υλικά σημεία κατά μήκος της πρώτης χορδής ταλαντώνονται με μεγαλύτερη περίοδο, από τα αντίστοιχα υλικά σημεία της δεύτερης χορδής.
- Το πλάτος ταλάντωσης των κοιλιών είναι το ίδιο.
- Τη χρονική στιγμή  $t_2 = t_1 + \frac{1}{4} T_a$ , όπου  $T_a$  η περίοδος του (α) κύματος η εικόνα των δύο χορδών είναι όπως στο διπλανό σχήμα, όπου έχουν σημειωθεί και οι ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων B και Γ.



Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

### 32) Μια ακόμη επιφανειακή συμβολή

Στην επιφάνεια ενός υγρού βρίσκονται δυο πηγές, οι οποίες μπορούν να δημιουργούν εγκάρσια επιφανειακά κύματα με συχνότητες 1Hz, τα οποία διαδίδονται με ταχύτητες 1m/s. Στο σχήμα, βλέπουμε το κύμα (1) το οποίο φτάνει στο σημείο O, μια στιγμή που λαμβάνουμε ως  $t=0$ , υποχρεώνοντάς το να ταλαντωθεί με πλάτος 0,04m, κινούμενο προς τα πάνω (θετική κατεύθυνση). Την ίδια στιγμή το κύμα (2), από τη δεύτερη πηγή, φτάνει στο σημείο K, όπου  $(OK)=0,75m$ , ενώ και το σημείο K αρχίζει την ταλάντωσή του προς τα πάνω.



- Ποια η διαφορά φάσης των απομακρύνσεων των σημείων K και O τη στιγμή  $t=0$ ;
- Το κύμα (2) φτάνει στο σημείο O τη στιγμή  $t_1$  με πλάτος κύματος 0,03m. Έτσι έχουμε συμβολή των κυμάτων (1) και (2).
  - Ποια η απομάκρυνση του O τη στιγμή  $t_1$ ;
  - Ποια η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων, που υποχρεώνεται να εκτελέσει πια, το σημείο O;
  - Να αποδείξετε ότι η κίνηση του σημείου O είναι μια αρμονική ταλάντωση της μορφής:

$$y = A \cdot \eta \mu(\omega t + \phi_0)$$

προσδιορίζοντας και τα χαρακτηριστικά της.

- Να υπολογίσετε την απομάκρυνση και την ταχύτητα του O τη χρονική στιγμή  $t_2 = 1,5s$ .

### 33) Πότε δημιουργείται στάσιμο κύμα;



Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται ένα κύμα με εξίσωση:

$$y=A\cdot\eta\mu(\omega t-2\pi x/\lambda)$$

Το παραπάνω κύμα μπορεί να συμβάλει με ένα δεύτερο κύμα που διαδίδεται στο ίδιο μέσο, με εξίσωση:

$$\alpha) y_1 = A\cdot\eta\mu(\omega t+2\pi x/\lambda)$$

$$\beta) y_2 = -A\cdot\eta\mu(\omega t+2\pi x/\lambda)$$

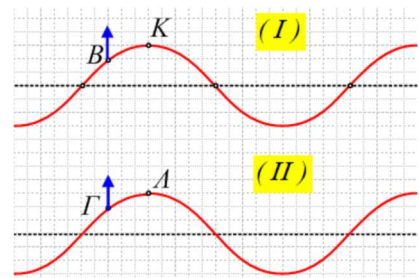
$$\gamma) y_3 = A\cdot\eta\mu 2\pi(t/T+x/\lambda+ 1/4)$$

$$\delta) y_4 = A\cdot\eta\mu(\omega t-2\pi x/\lambda-\pi/3)$$

- i) Σε ποιες περιπτώσεις θα έχουμε σχηματισμό στάσιμου κύματος στο ελαστικό μέσον;
- ii) Σε ποια ή ποιες περιπτώσεις το στάσιμο κύμα που θα σχηματισθεί θα έχει κοιλία στη θέση  $x=0$ ;
- iii) Στις περιπτώσεις που δεν σχηματίζεται στάσιμο κύμα, ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της συμβολής;

### 34) Στάσιμο και τρέχον κύμα

Στο σχήμα βλέπετε στιγμιότυπα δύο κυματομορφών, μιας περιοχής ενός γραμμικού ελαστικού μέσου (μιας χορδής), τα οποία ελήφθησαν κάποιες στιγμές. Η μορφή (I) δείχνει τμήμα της χορδής όταν πάνω της έχει σχηματισθεί στάσιμο κύμα, ενώ η (II), όταν στην ίδια περιοχή διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα. Στο σχήμα επίσης φαίνεται η ταχύτητα ταλάντωσης δύο σημείων B και Γ της χορδής.



- i) Το πλάτος του τρέχοντος κύματος (II) είναι ίσο με το πλάτος ταλάντωσης μιας κοιλίας στο στάσιμο;
- ii) Αν  $E_1$  η μέγιστη κινητική ενέργεια μιας στοιχειώδους μάζας  $\delta m$  στη θέση μιας κοιλίας και  $E_2$  η αντίστοιχη μέγιστη κινητική ενέργεια μιας ίσης μάζας  $\delta m$  στο τρέχον κύμα, ισχύει:
  - α)  $E_1 < E_2$ , β)  $E_1 = E_2$ , γ)  $E_1 > E_2$ .
- iii) Να σχεδιάσετε αντίστοιχο σχήμα που να εμφανίζονται ξανά τα δύο στιγμιότυπα (για την ίδια περιοχή), μετά από χρόνο  $\Delta t = 1/4 T$ , όπου  $T$  η περίοδος του τρέχοντος κύματος.

### 35) Συμβολή δύο ομοίων κυμάτων.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά (προς τη θετική κατεύθυνση) διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος  $A=0,2\text{m}$  και την ίδια συχνότητα  $f=1\text{Hz}$ . Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι ίση με  $v=2\text{m/s}$ . Σε ένα σημείο O, το οποίο θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων ( $x=0$ ), το πρώτο κύμα φτάνει κατά τη χρονική στιγμή  $t=0$  και το δεύτερο κύμα κατά τη χρονική στιγμή  $t_1=1,25\text{s}$ . Θεωρείστε ότι εξαιτίας κάθε κύματος το σημείο O αρχίζει να κινείται προς την θετική φορά (προς τα πάνω).

- i) Να γραφεί η εξίσωση του πρώτου κύματος και να σχεδιάστε το στιγμιότυπό του τη στιγμή  $t_1$  και για τα σημεία του θετικού ημιάξονα  $x$ .
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος για το δεύτερο κύμα.

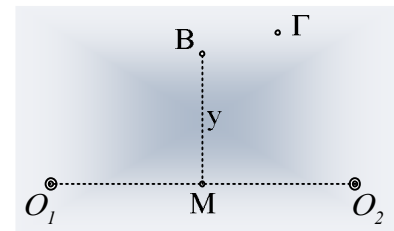
- iii) Να βρεθεί το αποτέλεσμα της συμβολής των δύο παραπάνω κυμάτων και να υπολογιστεί η απομάκρυνση ενός σημείου P, στη θέση  $x=1\text{m}$  τη χρονική στιγμή  $t_2=2,5\text{s}$ .
- iv) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση  $y=f(x)$  της απομάκρυνσης των διαφόρων σημείων του μέσου και για τα σημεία του θετικού ημιιάξονα, τη χρονική στιγμή  $t_2$ .

### 36) Μείωση του πλάτους του κύματος και συμβολή



Στην παραπάνω εικόνα, βλέπουμε τη διάδοση ενός κύματος στην επιφάνεια ενός υγρού. Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι όταν απομακρυνόμαστε από την πηγή, το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται. Αυτό δικαιολογείται, αφού καθώς το κύμα απλώνεται στην επιφάνεια, η ενέργεια που παρέχει η πηγή και μεταφέρεται από το κύμα, διαμοιράζεται συνεχώς και σε περισσότερα υλικά σημεία.

Έστω τώρα ότι στην επιφάνεια ενός υγρού, έχουμε δύο σύγχρονες πηγές κύματος  $O_1$  και  $O_2$  οι οποίες αρχίζουν να ταλαντώνονται κατακόρυφα, τη στιγμή  $t_0=0$ , με εξισώσεις  $y=8\cdot\eta\mu 2\pi t$  ( $y$  σε mm,  $t$  σε s.) δημιουργώντας έτσι εγκάρσια κύματα, τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα  $v=0,2\text{m/s}$  στην επιφάνεια του υγρού.



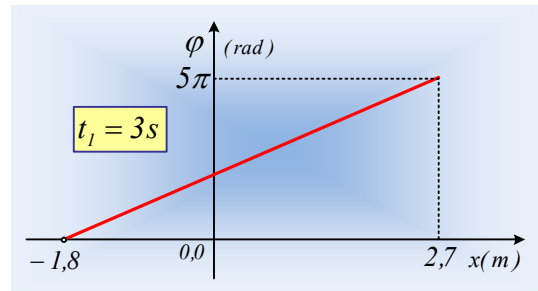
Παρατηρούμε ότι ένα σημείο M, στο μέσον της απόστασης των δύο πηγών ταλαντώνεται με πλάτος 12mm.

- i) Ποια η διαφορά φάσης των κυμάτων που φτάνουν στο M από τις δύο πηγές;
- ii) Ένα σημείο B της επιφάνειας του υγρού βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο της  $O_1O_2$  απέχοντας κατά  $y$  από το μέσον M.
- α) Τη στιγμή που η φάση της απομάκρυνσης του M είναι  $10\pi$  (rad), η αντίστοιχη φάση του B μπορεί να είναι:
- a)  $8\pi$  (rad), b)  $10\pi$  (rad), c)  $12\pi$  (rad)
- β) Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου B μπορεί να είναι:
- a) 10mm, b) 12mm, c) 14mm, d) 16mm
- iii) Για το σημείο Γ του σχήματος ισχύει  $r_1-r_2=0,7\text{m}$ , όπου  $r_1, r_2$  οι αποστάσεις του από τις δυο πηγές. Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Γ, μετά την συμβολή των δύο κυμάτων, μπορεί να είναι:
- a) 0 mm, b) 2mm, c) 8mm, d) 16mm.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

### 37) Άλλο ένα διάγραμμα φάσης

Μια πηγή κύματος ξεκινά την ταλάντωσή της τη στιγμή  $t_0=0$  δημιουργώντας ένα αρμονικό κύμα, το οποίο διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου. Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η φάση της απομάκρυνσης των σημείων του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_1=3s$ .

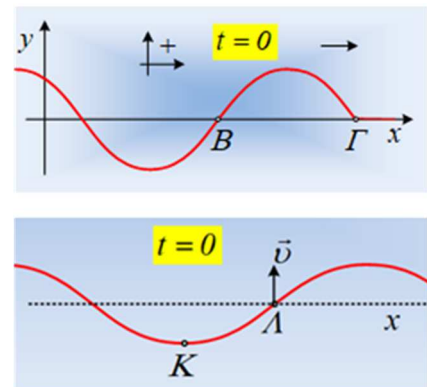


- i) Το κύμα αυτό διαδίδεται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά και γιατί; Ποια είναι η θέση της πηγής του κύματος;
- ii) Να βρεθεί η περίοδος και το μήκος του κύματος.
- iii) Ποια η φάση της απομάκρυνσης του σημείου O, στη θέση  $x=0$ , τις χρονικές στιγμές:
  - α)  $t_1=3s$  και  $t_2=4,8s$ .
- iv) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος, αν το πλάτος του είναι  $0,2m$ ;
- iv) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος την παραπάνω στιγμή  $t_1$ .

### 38) Φάσεις και διαφορές φάσεων σε ένα κύμα.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και προς τα δεξιά, διαδίδεται ένα κύμα και στο πρώτο σχήμα βλέπετε τη μορφή του μέσου τη στιγμή  $t=0$ . Αν το σημείο Γ, στο οποίο φτάνει το κύμα τη στιγμή αυτή, απέχει  $0,8m$  από το σημείο Β και αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση απομάκρυνσης την:

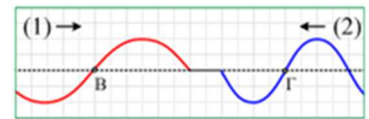
$$y_{\Gamma}=0,2 \cdot \eta\mu 4\pi t \quad (\text{S.I.})$$



- i) Να υπολογιστούν η συχνότητα και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- ii) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης ( $y=f(t)$ ) για το σημείο Β και να γίνει η γραφική της παράσταση μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_1=0,75s$ .
- iii) Να βρεθεί η εξίσωση της φάσης της απομάκρυνσης του σημείου Β σε συνάρτηση με το χρόνο και:
  - α) Να παρασταθεί γραφικά μέχρι τη στιγμή  $t_1$ .
  - β) Να βρεθεί η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Β και Γ.
- iv) Σε μια άλλη περίπτωση, κατά μήκος του ίδιου ελαστικού μέσου, διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα και στο δεύτερο σχήμα, βλέπετε τη μορφή μιας περιοχής του μέσου, κάποια στιγμή που πήραμε ως  $t=0$ . Τη στιγμή αυτή το σημείο Κ βρίσκεται σε ακραία θέση ταλάντωσης, ενώ το σημείο Λ έχει ταχύτητα ταλάντωσης, όπως στο σχήμα.
  - α) Αν η οριζόντια απόσταση των δύο σημείων είναι  $\Delta x=0,7m$ , να βρεθεί η συχνότητα του δεύτερου κύματος.
  - β) Αν κάποια στιγμή  $t_2$  το σημείο Κ έχει φάση απομάκρυνσης  $12\pi$  (rad) ποια θα είναι η αντίστοιχη φάση του σημείου Λ;

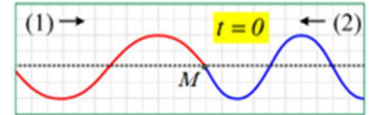
### 39) Δυο κύματα στο ίδιο μέσον

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται με αντίθετη φορά δυο κύματα, με αποτέλεσμα κάποια στιγμή, η μορφή μιας περιοχής του μέσου, να είναι όπως στο πάνω σχήμα.



i) Αντλώντας πληροφορίες από το σχήμα, να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

A) Αν η περίοδος του (1) κύματος είναι  $T_1=0,5s$ , τότε η περίοδος του (2) κύματος είναι ίση:



α)  $T_2=0,3s$ , β)  $T_2=1/3 s$ , γ)  $T_3=2/3 s$ , δ)  $T_2=0,8s$ .

B) Να σχεδιάσετε στο σχήμα τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων B και Γ. Ποια από τις δύο έχει μεγαλύτερο μέτρο;

Γ) Μετά από λίγο, μια στιγμή που θεωρούμε  $t=0$ , τα δυο κύματα συναντώνται στο σημείο M, όπως στο δεύτερο σχήμα. Το σημείο M αμέσως μετά:

- α) Θα κινηθεί προς τα πάνω.
- β) θα κινηθεί προς τα κάτω.
- γ) Θα παραμείνει ακίνητο.

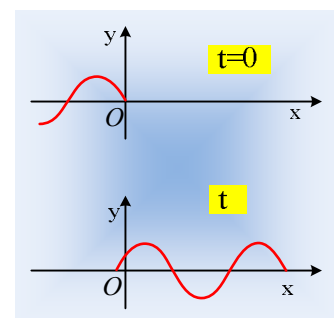
Να δικαιολογήσετε αναλυτικά τις απαντήσεις σας.

ii) Αν το πλάτος κάθε κύματος είναι  $A=0,2m$ , αφού βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου M, να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή  $t_1=2/3 s$ :

- α) την τιμή της απομάκρυνσης του σημείου M.
- β) την τιμή της ταχύτητας ταλάντωσης του M.

### 40) Μια αρχή στα κύματα

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από τα αριστερά προς τα δεξιά διαδίδεται χωρίς απώλειες ένα αρμονικό κύμα, το οποίο τη στιγμή  $t_0=0$  φτάνει σε ένα σημείο O, το οποίο λαμβάνουμε ως αρχή ενός προσανατολισμένου άξονα x, με την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική. Το σημείο O ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα πάνω (θετική φορά του άξονα y) και εκτελεί 10 πλήρεις ταλαντώσεις σε χρονικό διάστημα 12s, διανύοντας στο μεταξύ διάστημα 8m. Το κύμα φτάνει σε ένα σημείο B, στη θέση  $x_B=x_1=2,2m$  τη χρονική στιγμή  $t_1=1,1s$ .



i) Να γράψετε τις εξισώσεις για την απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο, για τις ταλαντώσεις που θα εκτελέσουν τα σημεία O και B.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

- iii) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή  $t_1$  που το κύμα φτάνει στο σημείο B και για την περιοχή του θετικού ημιάξονα. Ποια η απομάκρυνση του σημείου O την παραπάνω χρονική στιγμή;
- iv) Ποια χρονική στιγμή  $t_2$  το σημείο B, θα απέχει κατά  $0,1\text{m}$  από τη θέση ισορροπίας του, για πρώτη φορά; Πόση είναι η επιτάχυνσή του τη στιγμή αυτή; Να σχεδιάσετε την μορφή του μέσου (του θετικού ημιάξονα) την στιγμή  $t_2$  και να σημειώστε πάνω στο διάγραμμα την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου B.

#### 41) Συμβολή ή διακρότημα;

Έστω δυο πηγές αρμονικού ήχου στις θέσεις  $x=0$  και  $x_2=6\text{m}$ , ενός ακίνητου συστήματος αναφοράς  $xOy$ , όπως στο σχήμα, όπου στη θέση  $x_1=1\text{m}$  βρίσκεται ακίνητος ο παρατηρητής A.



Τη στιγμή  $t=0$  οι δυο πηγές αρχίζουν ταυτόχρονα να ταλαντώνονται με εξίσωση:

$$y = A \cdot \eta\mu 340\pi t \quad (\text{μονάδες στο S.I.})$$

οπότε παράγονται δύο ήχοι που διαδίδονται στη διεύθυνση  $x$ , με ταχύτητα  $v=340\text{m/s}$ .

(Στα παρακάτω, θα αντιμετωπίσουμε τον ήχο με τις γνωστές εξισώσεις όπως και στα εγκάρσια κύματα, αφού μας είναι πιο οικεία τα πράγματα, παρότι στα διαμήκη τα πράγματα είναι μάλλον αντίστροφα, αφού αυτό που ενδιαφέρει είναι οι μεταβολές της πίεσης και όχι η απομάκρυνση, με αποτέλεσμα π.χ. στους δεσμούς να έχουμε μέγιστο πλάτος. Μπορείτε να δείτε κάτι σχετικό από [εδώ](#)).

Ποιες είναι οι εξισώσεις των κυμάτων που παράγονται; Από την εξίσωση  $v=\lambda \cdot f$ , βρίσκουμε: .....

#### 42) Μια συμβολή από μη σύγχρονες πηγές

Στην επιφάνεια ενός μεγάλου δοχείου με νερό ηρεμούν δυο πηγές. Σε μια στιγμή  $t=0$  οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται με εξισώσεις  $y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi f t$  και  $y_2 = 2A \cdot \eta\mu 3\pi f t$  (μονάδες στο S.I.), δημιουργώντας εγκάρσια κύματα που διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού.

Ένα σημείο O βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει τις δύο πηγές.

i) Πρώτο θα φτάσει στο O:

- α) το κύμα από την πηγή (1)  
 β) το κύμα (2)  
 γ) Τα κύματα θα φτάσουν ταυτόχρονα στο O.

ii) Αν η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο O αρχίζει την στιγμή  $t_0$ , τότε τη στιγμή  $t_1 = t_0 + 3/f$ :

α) Η απομάκρυνση του σημείου O, από τη θέση ισορροπίας του είναι:

- a)  $-A$ ,    b)  $0$ ,    c)  $1,5A$ ,    d)  $3A$ .

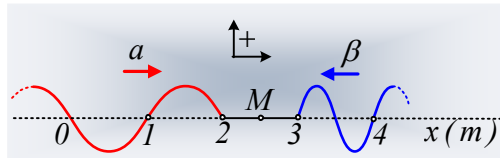
β) Η ταχύτητα ταλάντωσης του Ο έχει τιμή:

$$a) v_I = -4\pi fA, \quad b) v_I = -2\pi fA, \quad c) v_I = 2\pi fA, \quad d) v_I = 4\pi fA.$$

Να δικαιολογήσετε αναλυτικά τις απαντήσεις σας.

#### 43) Ταχύτητες σημείων σε δυο κύματα.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα  $x$  διαδίδονται αντίθετα δύο αρμονικά κύματα  $\alpha$  και  $\beta$ , του ίδιου πλάτους και σε μια στιγμή  $t_0=0$  η μορφή του μέσου είναι όπως στο σχήμα:



Τη στιγμή αυτή ( $t_0=0$ ) η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου στη θέση  $x=0$ , έχει μέτρο  $v_0=2\text{m/s}$ .

i) Η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου στη θέση  $x_4=4\text{m}$ , τη στιγμή  $t_0$  είναι ίση με:

$$\alpha) v_4 = -2\text{m/s}, \quad \beta) v_4 = +2\text{m/s}, \quad \gamma) v_4 = -4\text{m/s}, \quad \delta) v_4 = +4\text{m/s}.$$

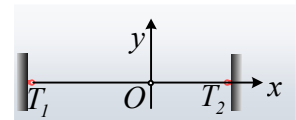
ii) Τη χρονική στιγμή  $t_1$  που το κύμα  $\alpha$  φτάνει στη θέση  $x'=3,5\text{m}$ , η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Μ στη θέση  $x_M=2,5\text{m}$  είναι ίση με:

$$\alpha) v_M = -2\text{m/s}, \quad \beta) v_M = +2\text{m/s}, \quad \gamma) v_M = -4\text{m/s}, \quad \delta) v_M = +4\text{m/s}.$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

#### 44) Ένα στάσιμο κύμα ανάμεσα σε δυο σταθερά σημεία.

Μεταξύ δύο σταθερών σημείων  $T_1$  και  $T_2$  βρίσκεται ένα γραμμικό ελαστικό μέσο, μήκους  $l=3\text{m}$ , στο οποίο έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύμα. Ένα σημείο Ο του ελαστικού μέσου απέχει κατά  $1,3\text{m}$  από το δεξιό άκρο  $T_2$  και το λαμβάνουμε ως αρχή ενός συστήματος αξόνων  $(x,y)$ . Με βάση αυτό το σύστημα αξόνων, το στάσιμο κύμα μπορεί να περιγραφεί από μια εξίσωση της μορφής:



$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} + \vartheta_0\right) \quad (1)$$

όπου τη στιγμή  $t=0$ , το σημείο Ο βρίσκεται σε απομάκρυνση  $y=-0,1\text{m}$  με μηδενική ταχύτητα. Εξάλλου σε χρονικό διάστημα  $\Delta t=0,4\text{s}$  το Ο εκτελεί δυο πλήρεις ταλαντώσεις, ενώ η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά μια κοιλία του μέσου έχει μέτρο  $v_{\max}=2\pi \text{ m/s}$ .

i) Να βρεθεί η συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης μιας κοιλίας του μέσου.

ii) Ποιες οι δυνατές τιμές της γωνίας  $\varphi_0$  που περιλαμβάνεται στην παραπάνω εξίσωση;

iii) Αν  $\varphi_0=\pi/3 \text{ rad}$  να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος κατά μήκος του μέσου αυτού, αν μεταξύ του σημείου Ο και του σημείου πρόσδεσης  $T_2$  υπάρχουν δύο σημεία του μέσου που παραμένουν ακίνητα.

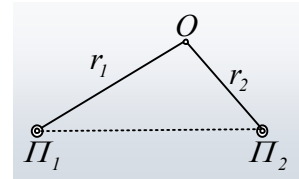
iv) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος.

- ν) Να παρασταθούν στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές  $t_1=0$  και  $t_2=0,125$  s, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

#### 45) Επιφανειακή συμβολή με διαφορετικά πλάτη.

Στην επιφάνεια ενός υγρού υπάρχουν δύο πηγές εγκάρσιων κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ , οι οποίες αρχίζουν να ταλαντώνονται ταυτόχρονα με εξισώσεις:

$$y_1=0,1 \cdot \eta\mu(4\pi t) \text{ και } y_2=0,2 \cdot \eta\mu(4\pi t) \text{ μονάδες στο S.I.}$$



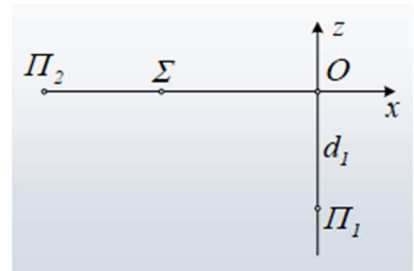
Έτσι δημιουργούνται επιφανειακά κύματα, τα οποία θεωρούμε ότι διαδίδονται με σταθερά πλάτη. Ένα σημείο  $O$  της επιφάνειας, απέχει αποστάσεις  $r_1=6\text{m}$  και  $r_2=4\text{m}$  αντίστοιχα από τις δύο πηγές. Το σημείο  $O$  αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή  $10/3\text{s}$ .

- i) Να υπολογιστεί το μήκος κύματος και η ταχύτητα των κυμάτων που δημιουργούνται.
- ii) Να βρεθεί η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων που θα υποχρεωθεί να εκτελέσει το σημείο  $O$ , λόγω συμβολής των κυμάτων.
- iii) Ποια η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου  $O$  μετά την συμβολή των δύο κυμάτων;
- iv) Να υπολογιστεί ο λόγος  $K_1/K_2$ , όπου  $K_1$  η μέγιστη κινητική ενέργεια μιας μάζας  $m$  στο σημείο  $O$  και  $K_2$  η μέγιστη δυνατή κινητική ενέργεια, που μπορεί να έχει η ίδια μάζα, σε κάποιο άλλο σημείο της επιφάνειας του υγρού.

## Ασκήσεις 2013-16

### 46) Επιφανειακή συμβολή.

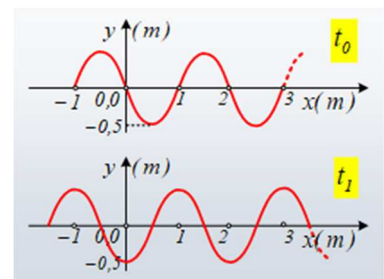
Στην επιφάνεια ενός υγρού ηρεμούν δύο πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ , όπως στο σχήμα (κάτοψη), όπου οι πηγές βρίσκονται σε σημεία δύο κάθετων μεταξύ τους αξόνων  $x$  και  $z$ , ενώ η πηγή  $\Pi_1$  απέχει κατά  $d_1=1,5\text{m}$  από την αρχή  $O$  των αξόνων. Σε μια στιγμή  $t=0$ , οι δύο πηγές τίθενται ταυτόχρονα σε ταλάντωση σε κατακόρυφη διεύθυνση με εξισώσεις  $y=0,2\cdot\eta\mu 2\pi t$  (S.I.). Τα κύματα που δημιουργούνται διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού και δεχόμαστε ότι έχουν σταθερό πλάτος. Τη στιγμή  $t_1=3\text{s}$  το πρώτο κύμα φτάνει στο σημείο  $O$ , ενώ το δεύτερο στο σημείο  $\Sigma$ , όπου  $(O\Sigma)=2\text{m}$ .



- i) Να βρεθεί η ταχύτητα διάδοσης του κύματος καθώς και η απόσταση  $(O\Pi_2)$  της δεύτερης πηγής από την αρχή  $O$  των αξόνων.
- ii) Να βρεθούν οι απομακρύνσεις και οι ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων  $\Sigma$  και  $O$  τη στιγμή  $t_3=4\text{s}$ .
- iii) Πόσες ταλαντώσεις εκτελεί το σημείο  $O$ , μέχρι να φτάσει και το δεύτερο κύμα; Να βρεθεί η εξίσωση ταλάντωσης του  $O$  μετά τη συμβολή.
- iv) Να υπολογιστεί ο λόγος  $K_1/K_2$  όπου  $K_1$  η μέγιστη κινητική ενέργεια μιας στοιχειώδους μάζας  $m$  στο σημείο  $O$ , πριν την συμβολή και  $K_2$  η αντίστοιχη μέγιστη κινητική ενέργεια, μετά τη συμβολή.
- v) Πόσα σημεία μεταξύ  $\Sigma$  και  $O$ , πάνω στον άξονα  $x$  ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος;

### 47) Το κύμα ξέφυγε προς τ' αριστερά.

Σε γραμμικό ελαστικό μέσο και από τα δεξιά προς τ' αριστερά (προς την αρνητική κατεύθυνση) διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα με στιγμιότυπο τη στιγμή  $t_0=0$ , όπως στο πρώτο από τα διπλανά σχήματα. Το αντίστοιχο στιγμιότυπο τη στιγμή  $t_1=0,5\text{s}$  είναι όπως στο δεύτερο διάγραμμα.



- i) Χρησιμοποιώντας πληροφορίες από τα διαγράμματα αυτά να βρείτε:
  - a) το πλάτος και το μήκος του κύματος,
  - β) τη συχνότητα και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- ii) Ποια η εξίσωση του κύματος;
- iii) Ένα σημείο  $K$ , βρίσκεται στη θέση  $x_K=1,5\text{m}$ .
  - a) Να βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο  $(y-t)$  για το σημείο  $K$  και να



κάνετε τη γραφική της παράσταση.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της φάσης του σημείου Κ σε συνάρτηση με το χρόνο.

iv) Να βρείτε τη φάση της απομάκρυνσης των διαφόρων σημείων του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_1=2,25s$ , σε συνάρτηση του  $x$  και να κάνετε επίσης τη γραφική της παράσταση.

#### 48) Οι βασικές εξισώσεις σε ένα τρέχον κύμα.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά (θετική φορά), διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα. Το κύμα φτάνει τη στιγμή  $t_0=0$  σε σημείο Ο, όπου η αρχή  $x=0$  του άξονα, το οποίο ξεκινά την ταλάντωσή του κινούμενο προς τα πάνω (θετική φορά). Το Ο περνά ξανά από την αρχική θέση ισορροπίας του τη στιγμή  $t_1=0,5s$  έχοντας διανύσει διάστημα  $0,4m$ , ενώ τη στιγμή αυτή το κύμα φτάνει σε σημείο Β στη θέση  $x_B=1m$ .

i) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

ii) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος και για τον θετικό ημιάξονα  $x$  τη χρονική στιγμή  $t_2=1,75s$ .

iii) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις σε συνάρτηση με το χρόνο:

α) της απομάκρυνσης, β) της ταχύτητας και γ) της επιτάχυνσης

του σημείου Γ στη θέση  $x_Γ=3m$ .

#### 49) Δύο στάσιμα κύματα στην ίδια χορδή.

Σε μια τεντωμένη χορδή με σταθερά άκρα, έχει σχηματισθεί στάσιμο κύμα και στο (α) σχήμα δίνεται ένα στιγμιότυπό του. Μια στοιχειώδης μάζα  $dm$  στη θέση μιας κοιλίας ταλαντώνεται με πλάτος  $A$ , αποκτώντας μέγιστη κινητική ενέργεια  $E_1$ .

Στην ίδια χορδή (με το ίδιο τέντωμα), μπορεί να δημιουργηθεί ξανά στάσιμο κύμα αλλά το στιγμιότυπό του, να είναι όπως στο (β) σχήμα. Στην περίπτωση αυτή μια ίση στοιχειώδης μάζα  $dm$  στην θέση μιας κοιλίας, ταλαντώνεται επίσης με πλάτος  $A$ , αποκτώντας μέγιστη κινητική

ενέργεια  $E_2$ . Για το λόγο  $\frac{E_1}{E_2}$  ισχύει:

$$\alpha) \frac{E_1}{E_2} = \frac{9}{16}, \quad \beta) \frac{E_1}{E_2} = \frac{3}{4}, \quad \gamma) \frac{E_1}{E_2} = 1, \quad \delta) \frac{E_1}{E_2} = \frac{4}{3}$$

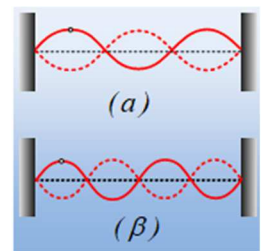
Να δικαιολογήστε την επιλογή σας.

#### 50) Σχετικά με τη φάση και τη διαφορά φάσης.

Στο πρώτο από τα διπλανά σχήματα, δίνεται ένα στιγμιότυπο μιας περιοχής ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, κάποια στιγμή  $t_0$ . Αν για τις φάσεις της απομάκρυνσης των σημείων Β και Γ του σχήματος ισχύει  $\varphi_B > \varphi_\Gamma$ :

i) Το στιγμιότυπο αυτό αντιστοιχεί:

α) σε τρέχον κύμα, β) σε στάσιμο κύμα.



ii) Για τη διαφορά φάσης  $\Delta\phi = \phi_B - \phi_\Gamma$  ισχύει:

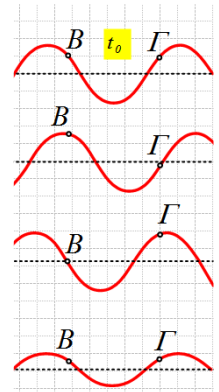
α)  $0 \leq \Delta\phi \leq \pi/2$

β)  $\pi/2 \leq \Delta\phi \leq \pi$

γ)  $\pi \leq \Delta\phi \leq 2\pi$

iii) Ποιο από τα παρακάτω στιγμιότυπα δείχνει τη μορφή της ίδιας περιοχής με τά από λίγο, τη στιγμή  $t_0 + \Delta t$ ;

iv) Τα υπόλοιπα δύο στιγμιότυπα που έχουν σχεδιαστεί (τα οποία δεν επιλέξατε), σε ποιες περιπτώσεις θα μπορούσαν να ήταν σωστά σαν επόμενα στιγμιότυπα του πρώτου;



Να δικαιολογήσετε **ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ** τις απαντήσεις σας.

### 51) Άλλο ένα στάσιμο κύμα σε χορδή.

Πάνω σε μια χορδή μήκους 10m έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύμα. Για να το μελετήσουμε μαθηματικά, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων x-y, όπου σε ένα σημείο O, που απέχει 3m από το αριστερό άκρο του θέτουμε  $x=0$ , ενώ θεωρούμε  $t=0$  τη στιγμή που το σημείο O βρίσκεται στην μέγιστη θετική απομάκρυνσή του. Το σημείο O φτάνει για πρώτη φορά στη μέγιστη αρνητική απομάκρυνσή του τη στιγμή  $t=0,5s$ , αφού διανύσει απόσταση 0,8m, ενώ απέχει οριζόντια απόσταση 1m από τον κοντινότερο δεσμό του στάσιμου. Δίνεται ακόμη ότι το σημείο O είναι κοιλία του στάσιμου κύματος.

i) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι της μορφής:

α)  $y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right)$

β)  $y = 2A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right)$

γ)  $y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right)$

Επιλέξτε τη σωστή μορφή δικαιολογώντας την επιλογή σας.

ii) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

iii) Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών του στάσιμου κύματος.

iv) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων στιγμιότυπα του στάσιμου τις χρονικές στιγμές:

α)  $t_1=0$  και β)  $t_2=0,75s$

Σημειώστε πάνω στο διάγραμμα την ταχύτητα του σημείου O, τις παραπάνω χρονικές στιγμές.

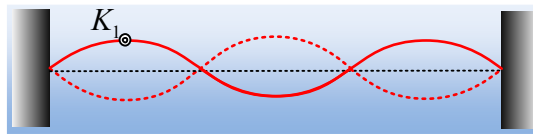
v) α) Να βρεθεί η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου B στη θέση  $x_1=4/3m$ .

β) Σε μια στιγμή η ταχύτητα του B έχει τιμή  $v_B=0,2\pi$  m/s. Να βρεθεί η αντίστοιχη ταχύτητα, την παραπάνω χρονική στιγμή, ενός σημείου Γ στη θέση  $x_2=2m$ .

### 52) Ένα στάσιμο κύμα, δύο εξισώσεις στάσιμου.

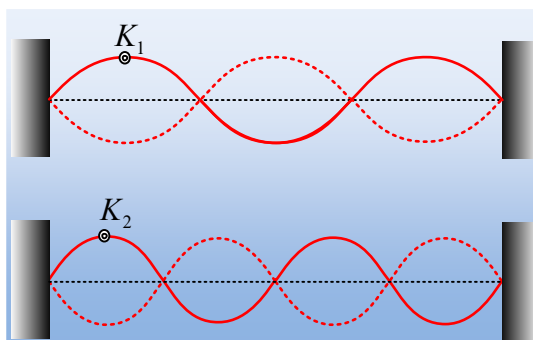
Μια χορδή μήκους 3m έχει στερεωμένα τα δυο άκρα της. Η χορδή τίθεται σε ταλάντωση και πάνω της

δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα, με μορφή όπως στο παρακάτω σχήμα, όπου το πλάτος ταλάντωσης της πρώτης κοιλίας  $K_1$  είναι  $0,2\text{m}$  και η συχνότητά της  $20\text{Hz}$ .



- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα ενός τρέχοντος κύματος κατά μήκος της παραπάνω χορδής.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος, δεχόμενοι ότι η αρχή του άξονα, είναι η θέση ισορροπίας της κοιλίας  $K_1$ , ενώ τη στιγμή  $t=0$  το σημείο  $K_1$  περνά από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη προς τα πάνω (θετική κατεύθυνση).
- iii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου, δεχόμενοι ως αρχή του άξονα  $x$ , το αριστερό άκρο της χορδής και την ίδια, όπως παραπάνω, στιγμή  $t=0$ .
- iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης ενός σημείου  $\Sigma$  το οποίο απέχει  $1,25\text{ m}$  από το αριστερό άκρο της χορδής. Η απάντηση να δοθεί με την βοήθεια και των δύο παραπάνω εξισώσεων στάσιμου που βρήκατε.

### 53) Μια χορδή, δύο στάσιμα κύματα.



Σε μια χορδή με σταθερά άκρα, μπορούν να σχηματισθούν στάσιμα κύματα, όπως στο παραπάνω σχήμα, με το ίδιο πλάτος  $A$ . Έστω δυο ίσες στοιχειώδεις σημειακές μάζες  $m_1$  και  $m_2$ , στις θέσεις των πρώτων κοιλιών  $K_1$  και  $K_2$  αντίστοιχα.

Αν η μέγιστη κινητική ενέργεια που αποκτά η μάζα  $m_1$  κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης, είναι  $E_1$ , τότε η μέγιστη κινητική ενέργεια της μάζας  $m_2$  είναι  $E_2$ , όπου:

$$\text{i) } E_2 < E_1, \quad \text{ii) } E_2 = E_1, \quad \text{iii) } E_2 > E_1.$$

Να δικαιολογήστε την επιλογή σας.

### 54) Διάδοση κυμάτων και συμβολή τους.

Στις θέσεις  $x_1=0$  και  $x_2=10\text{m}$  ενός ομογενούς γραμμικού ελαστικού μέσου υπάρχουν δύο πηγές  $O_1$  και  $O_2$  εγκαρσίων κυμάτων, που διαδίδονται με ταχύτητα  $v$ . Για  $t=0$  οι δύο πηγές αρχίζουν ταυτόχρονα να ταλαντώνονται με εξίσωση  $y=A\cdot\eta\mu\omega t$  (S.I.), οπότε δημιουργείται ένα κύμα εξαιτίας της  $O_1$  το οποίο διαδίδεται προς τα δεξιά και ένα κύμα εξαιτίας της  $O_2$ , που διαδίδεται προς τ' αριστερά. Κύματα δημιουργούνται μόνο στο χώρο μεταξύ των δύο πηγών.

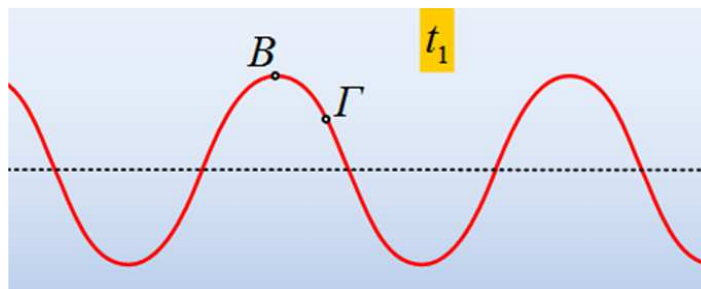
- i) Στο σχήμα φαίνεται η μορφή του μέσου τη στιγμή  $t_1=1,5s$ , εξαιτίας του κύματος από την πρώτη πηγή.



Να συμπληρωθεί το σχήμα, ώστε να φαίνεται και η διάδοση της διαταραχής εξαιτίας της δεύτερης πηγής  $O_2$ .

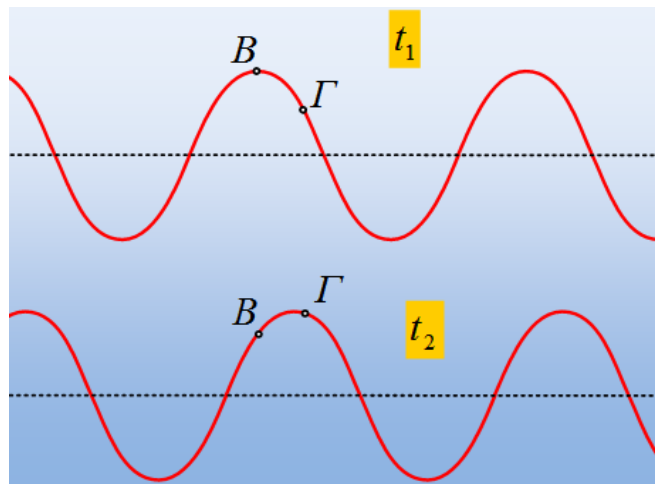
- ii) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τις χρονικές στιγμές  $t_2=2,5s$  και  $t_3=3,5s$ .  
 iii) Να βρεθούν οι ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων Β και Γ στις θέσεις  $x_B=5m$  και  $x_\Gamma=6m$  τις παραπάνω χρονικές στιγμές, αν το πλάτος της ταχύτητας ταλάντωσης κάθε πηγής είναι  $0,5m/s$ .

### 55) Πληροφορίες από ένα στιγμιότυπο.



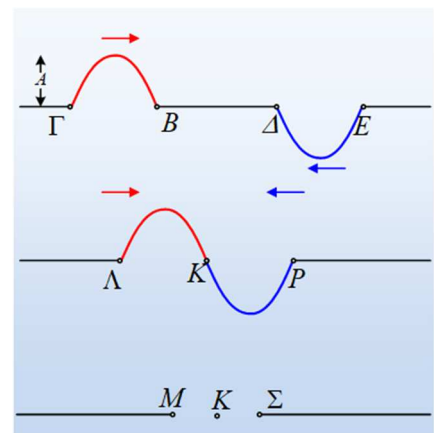
Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα ενός στιγμιότυπου, μιας περιοχής στην οποία έχουμε μια κυματική διαταραχή τη χρονική στιγμή  $t_1$ .

- i) Το παραπάνω στιγμιότυπο:
- Ανήκει σε τρέχον κύμα,
  - Ανήκει σε στάσιμο κύμα,
  - Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε.
- ii) Αν η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Β είναι μηδενική ενώ του Γ είναι διάφορη του μηδενός, το κύμα είναι τρέχον ή στάσιμο και γιατί;
- iii) Αν το κύμα είναι στάσιμο και το σημείο Γ κινείται προς τα πάνω, τότε το σημείο Β:
- κινείται προς τα πάνω,
  - κινείται προς τα κάτω,
  - έχει μηδενική ταχύτητα
- iv) Αν η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Γ είναι κατακόρυφη με φορά προς τη θέση ισορροπίας του, ενώ η ταχύτητα του Β μηδενική, το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά;
- v) Αν τη στιγμή  $t_2 = t_1 + \Delta t$ , όπου  $\Delta t < T/4$  το στιγμιότυπο της ίδιας περιοχής είναι όπως στο δεύτερο σχήμα, το στιγμιότυπο αυτό ανήκει σε στάσιμο ή τρέχον κύμα; Αν είναι τρέχον, προς τα πού κινείται; Προς τα δεξιά ή προς τ' αριστερά;



**56) Ένα ελαστικό μέσο – Δύο «αντίθετοι» παλμοί.**

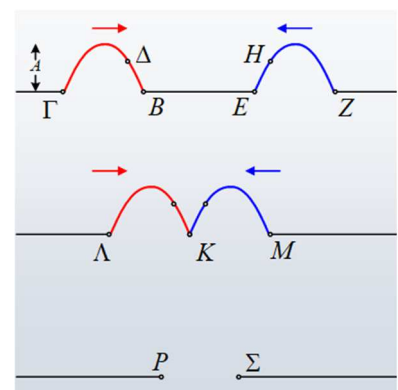
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται δύο παλμοί, ίδιου πλάτους και «μήκους κύματος» όπως στο πάνω σχήμα.



- i) Η φάση της απομάκρυνσης του σημείο B είναι ίση με ....., του σημείου Δ ....., του Γ ..... και του E .....
- ii) Να σχεδιάσετε στο πρώτο σχήμα τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων B, Γ, Δ και E.
- iii) Να συγκρίνετε τα μέτρα των ταχυτήτων των παραπάνω σημείων.
- iv) Μετά από λίγο, οι δύο παλμοί συναντώνται στο σημείο K. Να σχεδιάσετε ξανά τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων που έχουν σημειωθεί στο μεσαίο σχήμα.
- v) Αν η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου B είναι 1m/s (πάνω σχήμα), πόση είναι η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου K (μεσαίο σχήμα);
- vi) Στο κάτω σχήμα, να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη στιγμή που τα άκρα και των δύο παλμών είναι τα σημεία M και Σ.
- vii) Πόσο είναι η ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων M και Σ;
- viii) Κάθε παλμός μεταφέρει ενέργεια κατά τη διάδοσή του. Με ποια μορφή εμφανίζεται η ενέργεια του κύματος στο τελευταίο σχήμα;

**57) Ένα ελαστικό μέσο – Δύο παλμοί.**

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται δύο πανομοιότυποι παλμοί, όπως στο πάνω σχήμα και τα σημεία Δ και Η απέχουν εξίσου από τη θέση ισορροπίας.



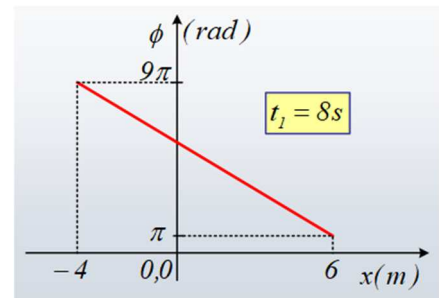
- i) Η φάση της απομάκρυνσης του σημείο B είναι ίση με ....., του σημείου E ....., του Γ ..... και του Z .....
- ii) Να σχεδιάσετε στο πρώτο σχήμα τις ταχύτητες ταλάντωσης των

σημείων Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και Η.

- iii) Να συγκρίνετε τα μέτρα των ταχυτήτων των παραπάνω σημείων.
- iv) Μετά από λίγο, οι δύο παλμοί συναντώνται στο σημείο Κ. Να σχεδιάσετε ξανά τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων που έχουν σημειωθεί στο μεσαίο σχήμα.
- v) Αν η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Β είναι 1m/s (πάνω σχήμα), πόση είναι η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Κ (μεσαίο σχήμα);
- vi) Στο κάτω σχήμα, να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη στιγμή που τα άκρα και των δύο παλμών είναι τα σημεία Ρ και Σ.
- vii) Πόσο είναι η ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων Ρ και Σ;
- viii) Κάθε παλμός μεταφέρει ενέργεια κατά τη διάδοσή του. Με ποια μορφή εμφανίζεται η ενέργεια του κύματος στο τελευταίο σχήμα;

### 58) Πληροφορίες από ένα διάγραμμα φάσης.

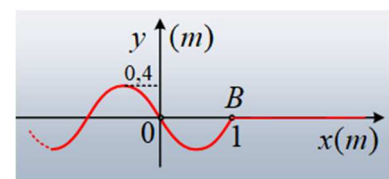
Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και στο διάγραμμα δίνεται η φάση της απομάκρυνσης των σημείων του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_1=8s$ , όπου τη στιγμή  $t_0=0$  ξεκίνησε η πηγή του κύματος, την ταλάντωσή της.



- i) Το κύμα αυτό διαδίδεται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά και γιατί;
- ii) Να βρεθεί η περίοδος και το μήκος του κύματος.
- iii) Ποια είναι η εξίσωση του κύματος, αν το πλάτος του είναι 0,5m;
- iv) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος την παραπάνω στιγμή.

### 59) Σειρά για μια τρίτη εξίσωση κύματος!!!

Στο σχήμα δίνεται η μορφή ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, κατά μήκος του οποίου διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα, από αριστερά προς τα δεξιά, τη χρονική στιγμή  $t_1=1s$ . Η περίοδος του κύματος είναι  $T=1s$ .

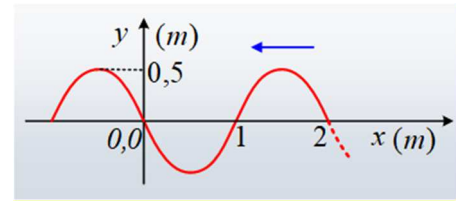


- i) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Β σε συνάρτηση με το χρόνο.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- iii) Να σχεδιαστεί ένα στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_1=3s$ , για το θετικό ημιάξονα x.
- iv) Να βρεθούν στη περιοχή  $-1m \leq x \leq 4m$  τα σημεία, τα οποία τη στιγμή  $t_2=1,5s$  έχουν απομάκρυνση  $y=+0,2m$ .

### 60) Το κύμα μας «ξέφυγε» προς τ' αριστερά.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα, χωρίς απώλειες ενέργειας και

στο διπλανό σχήμα φαίνεται η μορφή του μέσου, κάποια στιγμή που παίρνουμε ως  $t_0=0$ . Τη στιγμή αυτή, η κινητική ενέργεια μιας στοιχειώδους μάζας  $2\text{mg}$  που βρίσκεται στη θέση  $x=1\text{m}$ , είναι  $10^{-5}\text{J}$ .



- i) Να βρεθούν η συχνότητα, το μήκος κύματος και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- iii) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_1=1,5\text{s}$ .
- iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της φάσης της απομάκρυνσης ενός σημείου Β στη θέση  $x_1=-0,4\text{m}$ .  
Θεωρείστε ότι  $\pi^2 \approx 10$ .

### 61) Μια άλλη εξίσωση κύματος.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά, διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα. Θεωρώντας έναν άξονα  $x$ , με θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, το κύμα φτάνει τη στιγμή  $t_0=0$  σε σημείο Β στη θέση  $x_B=0,5\text{m}$ . Το σημείο Β τη στιγμή που φτάνει το κύμα, ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα πάνω (θετική φορά) και φτάνει σε ακραία θέση ταλάντωσης με απομάκρυνση  $0,5\text{m}$ , περνώντας ξανά για πρώτη φορά από την αρχική του θέση τη στιγμή  $t_1=0,5\text{s}$ . Τη χρονική στιγμή  $t_2=0,75\text{s}$  το κύμα φτάνει σε ένα άλλο σημείο Γ στη θέση  $x_1=2\text{m}$ .

- i) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
- ii) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος και για τον θετικό ημιάξονα  $x$  τη χρονική στιγμή  $t_3=2\text{s}$ .
- iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση  $\varphi=\varphi(t)$  της φάσης του σημείου Γ σε συνάρτηση με το χρόνο.
- iv) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια ενός υλικού σημείου Δ μάζας  $1\text{mg}$  το οποίο βρίσκεται στη θέση  $x=1\text{m}$ , τη στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο Γ.

### 62) Μια εισαγωγή στην εξίσωση κύματος.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά, διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα. Το κύμα φτάνει τη στιγμή  $t_0=0$  στην αρχή  $x=0$  του άξονα, ενώ τη στιγμή  $t_1=2\text{s}$  σε σημείο Β στη θέση  $x_B=3\text{m}$ . Το σημείο Β τη στιγμή που φτάνει το κύμα, ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα πάνω (θετική φορά) και φτάνει σε ακραία θέση ταλάντωσης με απομάκρυνση  $0,5\text{m}$ , μετά από χρόνο  $0,25\text{s}$ .

- i) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
- ii) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος και για τον θετικό ημιάξονα  $x$  τη χρονική στιγμή  $t_2=3,5\text{s}$ .
- iii) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις σε συνάρτηση με το χρόνο:
  - α) της απομάκρυνσης και β) της ταχύτητας του σημείου Β.
- iv) Αν στο σημείο Β βρίσκεται ένα υλικό σημείο μάζας  $1\text{mg}$ , να βρείτε τη δύναμη που δέχεται από τα διπλανά του υλικά σημεία, τις χρονικές στιγμές:

α)  $t_3=1,5s$  και β)  $t_4=2,125s$ .

### 63) Ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος.

i) Το άκρο Ο ενός τεντωμένου ελαστικού νήματος (1), τίθεται σε ταλάντωση, με συχνότητα  $f$  οπότε πάνω του διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Η μορφή του νήματος, τη στιγμή που το κύμα φτάνει στο σταθερό άκρο του νήματος, φαίνεται στο πρώτο σχήμα.



Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα με ένα δεύτερο νήμα (2), του ίδιου μήκους και η αντίστοιχη εικόνα είναι αυτή του δεύτερου σχήματος.

Αν  $v_1$  η ταχύτητα του κύματος στο (1) νήμα και  $v_2$  η αντίστοιχη ταχύτητα στο νήμα (2) ισχύει:

$$\alpha) \frac{v_1}{v_2} = 1, \quad \beta) \frac{v_1}{v_2} = 1,2, \quad \gamma) \frac{v_1}{v_2} = 1,4, \quad \delta) \frac{v_1}{v_2} = 1,6.$$

ii) Το άκρο Ο ενός τεντωμένου ελαστικού νήματος, τίθεται σε ταλάντωση, με συχνότητα  $f_1$  οπότε πάνω του διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Η μορφή του νήματος, τη στιγμή που το κύμα φτάνει στο σταθερό άκρο του νήματος, φαίνεται στο πρώτο σχήμα.



Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα στο ίδιο νήμα, αλλά με συχνότητα ταλάντωσης  $f_2$  και η αντίστοιχη εικόνα είναι αυτή του δεύτερου σχήματος.

Για τις συχνότητες των δύο κυμάτων ισχύει:

$$\alpha) \frac{f_2}{f_1} = 1,1, \quad \beta) \frac{f_2}{f_1} = 1,2, \quad \gamma) \frac{f_2}{f_1} = 1,3, \quad \delta) \frac{f_2}{f_1} = 1,4.$$

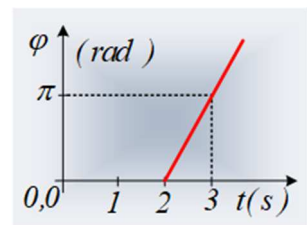
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

### 64) Επιφανειακή συμβολή και φάση.

Στην επιφάνεια ενός υγρού υπάρχουν δύο πηγές εγκαρσίων κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ , οι οποίες, κάποια στιγμή  $t_0=0$ , αρχίζουν να ταλαντώνονται ταυτόχρονα με εξισώσεις:

$$y_1=A\cdot\eta\mu(\omega t) \text{ και } y_2=A\cdot\eta\mu(\omega t)$$

Έτσι δημιουργούνται επιφανειακά κύματα, τα οποία θεωρούμε ότι διαδίδονται με σταθερά πλάτη και με μήκος κύματος  $\lambda=0,8m$ . Τα κύματα συμβάλουν σε ένα σημείο Ο, το οποίο ταλαντώνεται με πλάτος  $0,1m$  και στο σχήμα δίνεται η φάση της απομάκρυνσής του, σε συνάρτηση με το χρόνο.



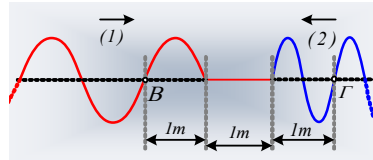
- i) Να υπολογιστεί η συχνότητα και η ταχύτητα των κυμάτων που δημιουργούνται.
- ii) Ποιο το πλάτος ταλάντωσης των πηγών και πόσο απέχει το σημείο Ο από τις πηγές των κυμάτων;
- iii) Να βρεθεί η διαφορά φάσης μεταξύ της απομάκρυνσης του σημείου Ο και της πηγής  $\Pi_1$  τη χρονική στιγμή  $t_1=3,25s$ .



- iv) Αν η απόσταση των δύο πηγών είναι  $(\Pi_1\Pi_2)=d=0,6\text{m}$ , πόσα σημεία πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την πηγή  $\Pi_1$  και το σημείο  $O$ , ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος;

### 65) Δύο κύματα χωρίς εξισώσεις.

Κατά μήκος ενός ελαστικού μέσου διαδίδονται αντίθετα δύο κύματα, του ίδιου πλάτους και τη στιγμή  $t_0$  έχουμε την εικόνα του σχήματος.



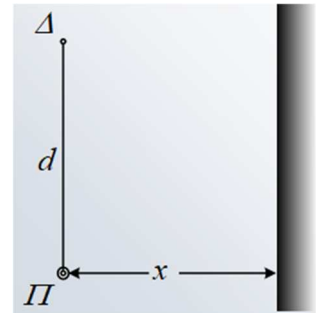
- i) Αν η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου  $B$ , την παραπάνω στιγμή, είναι  $v_B=-1\text{m/s}$ , τότε η ταχύτητα του σημείου  $\Gamma$  έχει τιμή:

α)  $v_\Gamma=-1\text{m/s}$ , β)  $v_\Gamma=1\text{m/s}$ , γ)  $v_\Gamma=2\text{m/s}$ , δ)  $v_\Gamma=3\text{m/s}$

- ii) Τη στιγμή  $t_1$ , που το κύμα (1) έχει διαδοθεί κατά  $d_1=2,5\text{m}$ , ποιες οι ταχύτητες των σημείων  $B$  και  $\Gamma$ ;

### 66) Συμβολή δύο ήχων μετά από ανάκλαση.

Μια ηχητική πηγή  $\Pi$ , βρίσκεται μπροστά από έναν κατακόρυφο τοίχο, σε απόσταση  $x=8\text{m}$  και παράγει έναν απλό ήχο συχνότητας  $f_1=85\text{Hz}$ . Στην ίδια απόσταση από τον τοίχο και σε απόσταση  $\Pi\Delta=d=12\text{m}$  βρίσκεται ένας δέκτης ηχητικών σημάτων  $\Delta$ .



- i) Ποια διαφορά φάσης της ταλάντωσης του δέκτη και της πηγής του κύματος, για το κύμα που διαδίδεται απευθείας από την πηγή στο δέκτη;
- ii) Να χαράξετε στο σχήμα την διαδρομή που θα ακολουθήσει ο ήχος, ο οποίος φτάνει στο δέκτη, μετά από ανάκλαση στον τοίχο, υπολογίζοντας και το μήκος της διαδρομής από την πηγή μέχρι το δέκτη  $\Delta$ .
- iii) Ποια η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ήχων που συμβάλουν στο σημείο  $\Delta$ ;
- iv) Αυξάνουμε σιγά-σιγά τη συχνότητα του ήχου. Για ποια τιμή της συχνότητας  $f_2$  θα έχουμε μέγιστη ένδειξη στον δέκτη;
- v) Πλησιάζουμε την πηγή στον τοίχο σε απόσταση  $x_1=4\text{m}$ . Να χαράξετε την πορεία του ήχου ο οποίος θα φτάσει στον δέκτη, αφού ανακλαστεί πρώτα στον τοίχο και να υπολογίστε τη διαφορά φάσης μεταξύ της ταλάντωσης της πηγής και του δέκτη, εξαιτίας του ήχου αυτού, για ταλάντωση της πηγής με συχνότητα  $f_1$ .

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου  $v=340\text{m/s}$ .

### 67) Πόσο έχουμε μάθει να δουλεύουμε τα κύματα;

*Μια άσκηση από παλιότερο test.*

Έστω δυο σημεία  $B$  και  $\Gamma$  ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, (ας θεωρήσουμε του άξονα  $x'x$ ) κατά μήκος του

οποίου διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα της μορφής:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ με } t \geq 0 \text{ και } x \leq \frac{\lambda}{T} t$$

Η οριζόντια απόσταση ΒΓ είναι ίση με  $d = 5\lambda/4$ , όπου  $\lambda$  το μήκος του κύματος, ενώ το κύμα διαδίδεται από το Β προς το Γ. Κάποια χρονική στιγμή  $t_0$  το κύμα φτάνει στο σημείο Γ, ενώ το σημείο Β βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνσή του.

i) Να σχεδιάσετε τμήμα του στιγμιότυπου του κύματος από το Β μέχρι το Γ τη χρονική στιγμή  $t_0$ .

Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Β είναι:

$$y_B = 0,1\eta\mu(5\pi t - \pi) \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

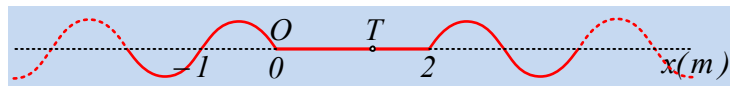
ii) Να βρεθεί το πλάτος, η συχνότητα του κύματος, όπως επίσης και το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να διαδοθεί το κύμα από το Β στο Γ.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης – χρόνου για το σημείο Γ.

iv) Αν τη χρονική στιγμή  $t_1 = t_0 + 0,1\text{s}$  το κύμα έχει φτάσει σε ένα σημείο Δ το οποίο απέχει κατά 1m από το Γ (στη διεύθυνση του άξονα) να βρείτε την εξίσωση του κύματος και να κάνετε το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή  $t_1$  κατά μήκος του θετικού ημιάξονα x.

### 68) Δύο τρέχοντα κύματα και περιοχές συμβολής.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, που θεωρούμε ότι ταυτίζεται με τον άξονα x, διαδίδονται δύο όμοια κύματα πλάτους  $A=0,2\text{m}$ , τα οποία διαδίδονται αντίθετα με συχνότητα 1Hz. Τη στιγμή  $t=0$  το πρώτο κύμα φτάνει στο σημείο Ο, στη θέση  $x=0$ , ενώ το δεύτερο απέχει κατά 2m από το Ο, όπως στο σχήμα.



i) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων.

ii) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που θα προκύψει μετά την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.

iii) α) Να σχεδιάσετε τη μορφή του ελαστικού μέσου, στην περιοχή  $-2\text{m} \leq x \leq 3\text{m}$ , τη χρονική στιγμή  $t_1 = 1,25\text{s}$ .

β) Να σχεδιάσετε επίσης τη μορφή του μέσου τη στιγμή  $t_1' = 1\text{s}$ .

iv) Να κάνετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος και για την περιοχή που έχει αυτό σχηματισθεί, τη χρονική στιγμή  $t_2 = 1,75\text{s}$ .

v) Ένα σημείο Σ βρίσκεται στη θέση  $x=0,5\text{m}$ . Να κάνετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Σ σε συνάρτηση με το χρόνο, από  $t=0$ , έως και  $t=4\text{s}$ .

### 69) Μια χορδή σε ταλάντωση ή δυο στάσιμα κύματα.

Μια χορδή μήκους 5m είναι στερεωμένη στα άκρα της Κ και Λ. Όταν εκτρέψουμε το μέσον της Μ, απαιτείται χρονικό διάστημα  $\Delta t = 0,125\text{s}$  για να φτάσουν τα τρέχοντα κύματα στα άκρα της. Μετά από λίγο δημιουργείται σταθερή κατάσταση πάνω της και η πρώτη κοιλία από τ' αριστερά, παρατηρείται σε ένα σημείο Ο, όπου

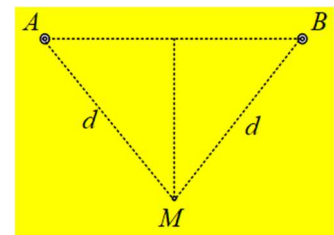
(ΚΟ)=0,5m. Το πλάτος ταλάντωσης του Ο είναι 0,2m και προκειμένου να γράψουμε εξίσωση για το στάσιμο αυτό, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων με  $x=0$ , τη θέση Ο και  $t_0=0$  τη στιγμή που το Ο βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση, ενώ έχει ήδη δημιουργηθεί το στάσιμο κύμα.

- i) Να βρεθεί η ταχύτητα διάδοσης του τρέχοντος κύματος και η συχνότητα ταλάντωσης της χορδής.
- ii) Με βάση τις παραπάνω συμβάσεις, να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται πάνω στη χορδή και να κάνετε το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή  $t=0$ .
- iii) Δύο σημεία Β και Γ απέχουν από τα άκρα της χορδής Κ και Λ αποστάσεις 0,8m και 1,3m αντίστοιχα. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της φάσης της απομάκρυνσης των παραπάνω σημείων, στους ίδιους άξονες, σε συνάρτηση με το χρόνο.
- iv) Ακινητοποιούμε τη χορδή και την θέτουμε ξανά σε ταλάντωση, με τέτοια συχνότητα, ώστε να έχουμε το μεγαλύτερο δυνατόν μήκος κύματος. Στην περίπτωση αυτή, μόλις αποκατασταθεί μόνιμη κατάσταση, το σημείο Ο ταλαντώνεται με πλάτος 0,1m. Να υπολογιστεί η συχνότητα ταλάντωσης καθώς και η μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να έχει μια στοιχειώδης μάζα  $dm=1\text{mg}$  της χορδής.

Δίνεται  $\sin(0,4\pi) \approx 0,3$ .

### 70) Μια λίγο διαφορετική συμβολή.

Στην επιφάνεια ενός ηρεμούντος υγρού, βρίσκονται δυο πηγές κυμάτων Α και Β, οι οποίες ηρεμούν. Σε μια στιγμή θέτουμε σε κατακόρυφη ταλάντωση την Α πηγή, με συχνότητα  $f=1\text{Hz}$ , οπότε διαδίδεται στην επιφάνεια του υγρού ένα κύμα, το οποίο μετά από 3s φτάνει σε ένα σημείο Μ, που βρίσκεται στην μεσοκάθετη της απόστασης των δύο πηγών απέχοντας  $d=1,5\text{m}$  από τις πηγές, το οποίο ξεκινά την ταλάντωσή του κινούμενο με κατεύθυνση προς τα πάνω. Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Μ είναι 4mm.



Σταματάμε την Α πηγή και θέτουμε σε παρόμοια ταλάντωση τη Β πηγή, οπότε εξαιτίας του νέου κύματος που δημιουργείται το σημείο Μ ταλαντώνεται με πλάτος 3mm και με συχνότητα 1Hz.

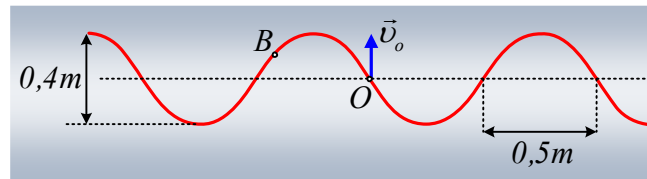
- i) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του πρώτου κύματος και να κάνετε τη γραφική παράσταση της φάσης της απομάκρυνσης του Μ σε συνάρτηση με το χρόνο, όταν ταλαντώνεται μόνο η Α πηγή.

Κάποια στιγμή  $t_0=0$ , θέτουμε την Α πηγή σε νέα ταλάντωση και τη στιγμή  $t_1=1,5\text{s}$  θέτουμε σε ταλάντωση και τη πηγή Β. Και οι δυο πηγές ξεκινούν την ταλάντωσή τους κινούμενες αρχικά με φορά προς τα πάνω.

- ii) Να βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Μ, μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων.
- iii) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις:
  - α) της φάσης της απομάκρυνσης του Μ και
  - β) της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Μ,
 για όλο το χρόνο ταλάντωσής του και μέχρι τη στιγμή  $t_2=6\text{s}$

**71) Αν δίνεται μια κυματομορφή σε μια περιοχή.**

Στο σχήμα δίνεται μια περιοχή ενός γραμμικού ελαστικού μέσου κάποια στιγμή  $t_0$ , όπου η ταχύτητα του σημείου  $O$  έχει τιμή  $v_0=0,4\pi$  m/s.

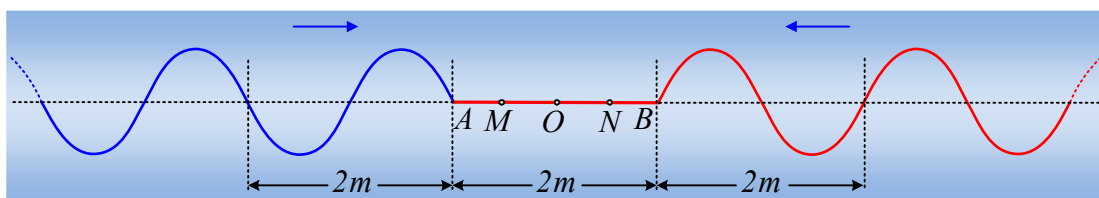


- i) Η κυματομορφή αυτή αντιστοιχεί σε τρέχον ή στάσιμο κύμα και γιατί; Να σχεδιάσετε τη στιγμή αυτή την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου  $B$ .
- ii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης ενός τρέχοντος κύματος κατά μήκος του παραπάνω μέσου.
- iii) Να σχεδιάσετε τη μορφή της ίδιας περιοχής του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_0+0,75s$ .
- iv) Στην περίπτωση που τη στιγμή  $t_0$ , οι ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων  $B$  και  $O$  είναι μηδενικές, να σχεδιάσετε ξανά τη μορφή του μέσου τη στιγμή  $t_0+0,75s$ .

**72) Αν δίνονται άλλες πληροφορίες για ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα.**

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, προς την θετική κατεύθυνση (από αριστερά προς τα δεξιά) και τη στιγμή  $t=0$  φτάνει στο σημείο  $K$  στη θέση  $x=1,8m$ . Το σημείο  $K$  ξεκινά την ταλάντωσή κινούμενο προς τα πάνω (θετική φορά) και φτάνει στην ακραία θέση του, σε απόσταση  $0,2m$  σε χρονικό διάστημα  $\Delta t=0,25s$ , ενώ στο μεταξύ το κύμα έχει διαδοθεί φτάνοντας στο σημείο  $\Lambda$ , όπου  $(K\Lambda)=0,1m$ .

- i) Να υπολογισθεί η ταχύτητα διάδοσης του κύματος, καθώς και η εξίσωση του κύματος.
- ii) Να βρεθεί η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου  $O$ , στη θέση  $x_1=0$ , σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- iii) Να βρεθεί η θέση μέχρι την οποία έχει διαδοθεί το κύμα στη στιγμή  $t_1=1s$ .
- iii) Να βρεθούν οι θέσεις των σημείων, τα οποία τη στιγμή  $t_2=0$  έχουν μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα ταλάντωσης, στην περιοχή  $-0,5m \leq x \leq 0,5m$ .
- iv) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_1=1s$ .

**73) Έχουμε διάδοση ενέργειας;**

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου κινούνται αντίθετα δύο όμοια κύματα, πλάτους  $A$ , με ταχύτητες  $1m/s$  και σε μια στιγμή  $t=0$  έχουμε την εικόνα του παραπάνω σχήματος.

- A) Αν  $(AM)=(MO)=(ON)=(NB)$  να εξετάσετε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων.

- i) Τη στιγμή  $t_1=1\text{s}$  η απομάκρυνση του σημείου M είναι ίση με A.
- ii) Τη στιγμή  $t_2=1,5\text{s}$  η απομάκρυνση του σημείου O, είναι ίση με 2 A.
- iii) Μετά τη στιγμή  $t_2=1,5\text{s}$  το σημείο N παραμένει διαρκώς ακίνητο.
- iv) Το κύμα που κινείται προς τα αριστερά μεταφέρει με σταθερό ρυθμό ενέργεια στο τμήμα ON του μέσου.

B) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_3=2\text{s}$ . Πάνω στο σχήμα να σχεδιάσετε τις ταχύτητες των σημείων του μέσου μεταξύ των θέσεων A και B.

#### 74) Ένα normal!!! κύμα...

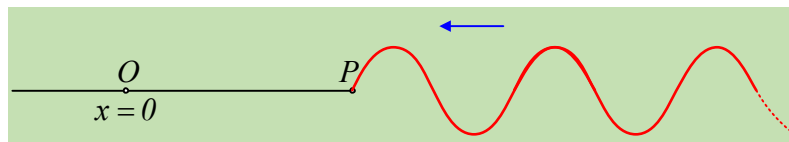
Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο εκτείνεται στη διεύθυνση του άξονα x, διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα κατά τη θετική κατεύθυνση. Θεωρούμε αρχή του άξονα το σημείο O του ελαστικού μέσου το οποίο τη χρονική στιγμή  $t = 0$  αρχίζει να εκτελεί αμείωτη αρμονική ταλάντωση με θετική ταχύτητα. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι  $0,1\text{m}$ , ενώ η μέγιστη επιτάχυνση των μορίων του μέσου είναι  $0,25\text{m/s}^2$ . Ένα σημείο B του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση  $x = 0,3\text{ m}$  τη χρονική στιγμή  $t = 8\text{ s}$  βρίσκεται για 2η φορά στη μέγιστη θετική απομάκρυνση.

Να βρεθούν:

- i) Το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- ii) Την εξίσωση του κύματος.
- iii) Την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου B τη χρονική στιγμή  $t_1 = 11/3\text{ s}$ .
- iv) Για πόσο χρόνο ταλαντώνεται μέχρι τη στιγμή  $t=8\text{s}$ , ένα σημείο Γ του θετικού ημιάξονα, που έχει απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του  $-5\text{ cm}$  και ταχύτητα θετική για πρώτη φορά.
- v) Να παρασταθεί γραφικά η φάση του σημείου Δ για το χρονικό διάστημα 0 έως  $12\text{ s}$ , αν γνωρίζουμε ότι το σημείο Δ έχει μικρότερη φάση από το σημείο B κατά  $\pi/2\text{ rad}$  τη χρονική στιγμή t.

Δίνεται  $\pi^2 \approx 10$ .

#### 75) Ένα κύμα οδεύει προς τ' αριστερά.



Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από δεξιά προς τα αριστερά διαδίδεται ένα κύμα με ταχύτητα  $v=2\text{m/s}$ . Το κύμα για  $t=0$  φτάνει στο σημείο P, στη θέση  $x_P=2\text{m}$ , το οποίο ξεκινά την ταλάντωσή του κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση (προς τα πάνω). Τη στιγμή  $t'=0,375\text{s}$  το σημείο P έχει μηδενική ταχύτητα, για δεύτερη φορά, ενώ έχει διανύσει απόσταση  $d=0,3\text{m}$ .

- i) Ποια η εξίσωση του κύματος;
- ii) Να σχεδιάσετε την μορφή του ελαστικού μέσου (στιγμιότυπο του κύματος), μέχρι τη θέση  $x_2=3\text{m}$  τη χρονική στιγμή  $t_2=1,5\text{s}$ .

**76) Και μια άλλη εξίσωση κύματος.**

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου από αριστερά προς τα δεξιά, το οποίο περιγράφεται από τη μαθηματική εξίσωση:

$$y = 0,5 \cdot \eta \mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \right) \text{ με } t \in \mathbb{R} \text{ και } t \geq 0,5x - 1,25 \text{ μονάδες στο S.I.}$$

- i) Να υπολογισθεί η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- ii) Να βρεθεί η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου O, στη θέση  $x=0$ , σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- iii) Να βρεθεί η θέση μέχρι την οποία έχει διαδοθεί το κύμα στη στιγμή  $t_1=1\text{s}$ .
- iv) Να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός σημείου M, στη θέση  $x_M=1\text{m}$ , σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_2=3\text{s}$ .
- v) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_1=1\text{s}$ .

Η κατεύθυνση προς τα δεξιά, αλλά και η απομάκρυνση προς τα πάνω, θεωρούνται θετικές.

**77) Αν δίνεται η εξίσωση ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος.**

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου από αριστερά προς τα δεξιά, το οποίο περιγράφεται από τη μαθηματική εξίσωση:

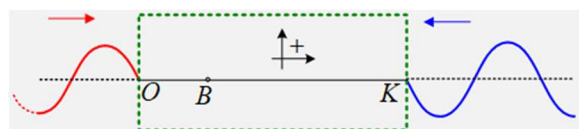
$$y = 0,2 \cdot \eta \mu 2\pi(t - 2,5x + 4,5) \text{ με } t \in \mathbb{R} \text{ και } t \geq 2,5x - 4,5 \text{ μονάδες στο S.I.}$$

- i) Να υπολογισθεί η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- ii) Να βρεθεί η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου O, στη θέση  $x=0$ , σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- iii) Να βρεθεί η θέση μέχρι την οποία έχει διαδοθεί το κύμα στη στιγμή  $t_1=1\text{s}$ .
- iv) Να βρεθούν οι θέσεις των σημείων, τα οποία τη στιγμή  $t_2=0$  έχουν μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα ταλάντωσης, στην περιοχή  $-0,5\text{m} \leq x \leq 0,5\text{m}$ .
- v) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_1=1\text{s}$ .

Η κατεύθυνση προς τα δεξιά, αλλά και η απομάκρυνση προς τα πάνω, θεωρούνται θετικές.

**78) Κοιτάζοντας το παράθυρο, παρατηρούμε τα κύματα.**

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται με ταχύτητα  $v=1\text{m/s}$  δύο κύματα και τη στιγμή  $t_0=0$ , φτάνουν στα σημεία O και K, στα άκρα ενός παραθύρου, με  $(OK)=4\text{m}$ , το οποίο αποτελεί την περιοχή παρατήρησής μας. Το πλάτος κάθε κύματος είναι  $A=0,6\text{m}$  και το μήκος κύματος  $\lambda=2\text{m}$ .



- i) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος, για κάθε κύμα, θεωρώντας τη θέση του σημείου O, ως αρχή του άξονα ( $x=0$ ) και θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση.

ii) Μια σημειακή μάζα  $dm=10^{-7}\text{kg}$ , βρίσκεται στο σημείο Β, με  $x_B=1\text{m}$ . Να βρεθούν η κινητική της ενέργεια και η συνισταμένη δύναμη που δέχεται τις χρονικές στιγμές:

α)  $t_1=1,25\text{s}$  και β)  $t_2=3,6\text{s}$ .

iii) Να σχεδιάσετε τη μορφή του ελαστικού μέσου στο παραπάνω παράθυρο τη στιγμή  $t_3=5\text{s}$ .

### 79) Το κύμα και η εξίσωσή του

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και προς την θετική κατεύθυνση (προς τα δεξιά) διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα.

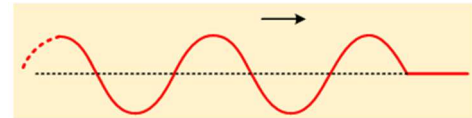
Η εξίσωση του κύματος έχει τη μορφή:

$$\text{i) } y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ii) } y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{l}{2} \right)$$

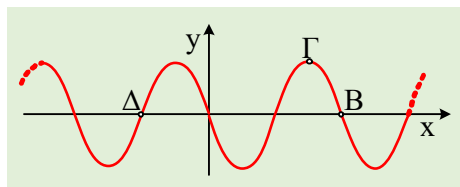
$$\text{iii) } y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{l}{2} \right)$$

iv) Όλες οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να περιγράψουν το παραπάνω κύμα.



### 80) Ταχύτητες σημείων και στιγμιότυπο κύματος.

Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται προς τ' αριστερά κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και στο σχήμα φαίνεται ένα τμήμα του μέσου στο οποίο έχει ήδη διαδοθεί το κύμα (το κύμα έχει διαδοθεί πολύ πιο πέρα από το τμήμα που βλέπετε).



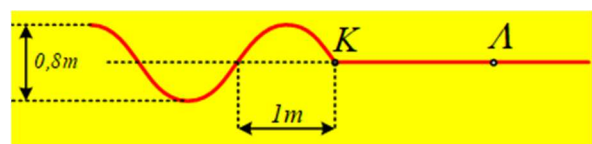
i) Να σχεδιάσετε στο σχήμα, τις ταχύτητες των σημείων Β, Γ και Δ.

ii) Το σημείο Β ή το Δ έχει μεγαλύτερη φάση; Να υπολογιστεί η διαφορά φάσης μεταξύ τους.

iii) Να σχεδιάσετε το αντίστοιχο στιγμιότυπο της ίδιας περιοχής του μέσου, τη χρονική στιγμή που το σημείο Γ έχει μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα, για  $2^{\text{η}}$  φορά μετά τη στιγμή  $t_0$ .

### 81) Ένα κύμα, δύο εξισώσεις κύματος

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από τα αριστερά προς τα δεξιά διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα και στο σχήμα δίνεται η μορφή του μέσου σε μια στιγμή που



θεωρούμε ότι  $t_0=0$ . Το κύμα αυτό φτάνει στο σημείο Λ, όπου  $(ΚΛ)=5/3\text{m}$  τη στιγμή  $t_1=5/6\text{s}$ . Με βάση τις πληροφορίες που δίνονται στο σχήμα, δυο μαθητές, προχωρούν στην «μαθηματική μελέτη» του κύματος,

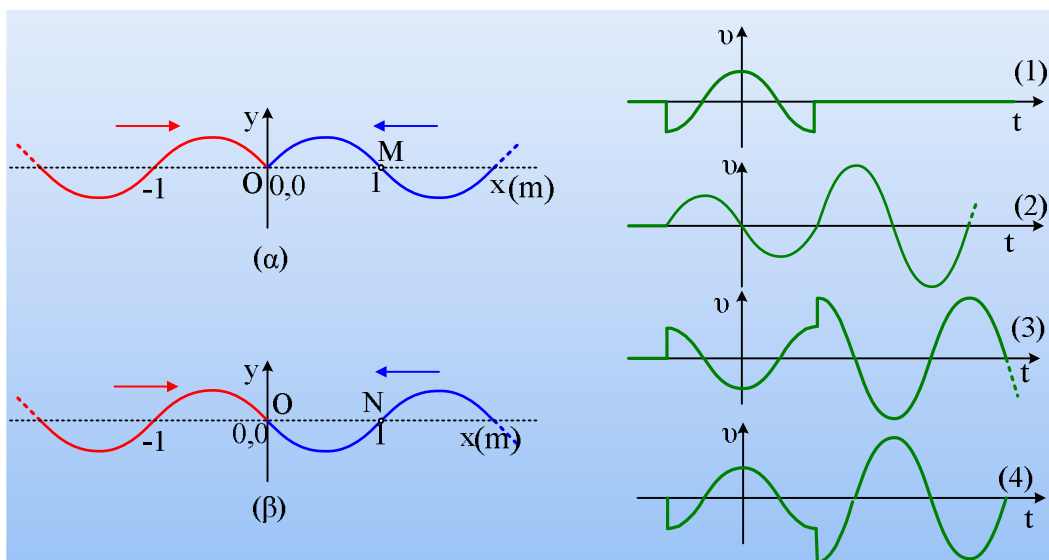
θέλοντας να απαντήσουν σε μια σειρά ερωτημάτων. Ο πρώτος (Γιάννης) θεωρεί αρχή του άξονα ( $x=0$ ) το σημείο Κ στο οποίο έχει φτάσει το κύμα, ο δεύτερος (Δημήτρης) παίρνει ως αρχή το σημείο Λ. Τα ερωτήματα είναι:

- i) Να βρεθεί το μήκος κύματος και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- ii) Ποια η εξίσωση του κύματος;
- iii) Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή  $t_2=7/4s$ .
- iv) Να υπολογιστούν τη στιγμή  $t_2$  η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Λ.
- v) Να γίνει η γραφική παράσταση της φάσης της απομάκρυνσης του σημείου Λ σε συνάρτηση με το χρόνο.

Ποιες απαντήσεις δίνουν οι μαθητές;

### 82) Στάσιμα κύματα και ταχύτητες σημείων.

Κατά μήκος δυο γραμμικών ελαστικών μέσων διαδίδονται αντίθετα δύο όμοια κύματα, τα οποία συμβάλουν δημιουργώντας στάσιμα κύματα. Στα σχήματα αριστερά δίνονται οι μορφές των μέσων μια στιγμή που θεωρούμε  $t=0$ .



- i) Στο (α) ελαστικό μέσον θα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα και στις θέσεις 0,5m, 1,5m, 2,5m, θα δημιουργηθούν δεσμοί.
- ii) Στο (β) ελαστικό μέσον στα σημεία  $x=0$ , 1m, 2m θα δημιουργηθούν δεσμοί.
- iii) Στα δεξιά σχήματα έχουμε σχεδιάσει την ταχύτητα ταλάντωσης δύο σημείων Μ και Ν των δύο ελαστικών μέσων τα οποία βρίσκονται στις θέσεις  $x=1m$ . Ποια καμπύλη αντιστοιχεί σε κάθε σημείο;

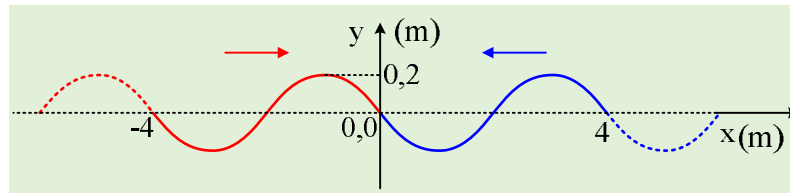
Να χαρακτηρίστε ως σωστές ή λανθασμένες τις δύο πρώτες προτάσεις και να κάνετε την αντιστοίχιση για την iii) δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

### 83) Ένα στάσιμο κύμα με δεσμό στην αρχική θέση.

Κατά μήκος ενός ελαστικού μέσου διαδίδονται αντίθετα δύο κύματα με το ίδιο πλάτος  $A=0,2m$  και το ίδιο μήκος κύματος  $\lambda=4m$  και τη στιγμή  $t=0$  τα δυο κύματα φτάνουν ταυτόχρονα σε ένα σημείο Ο, το οποίο



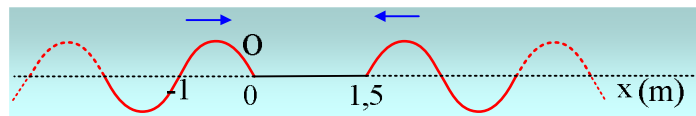
θεωρούμε αρχή του άξονα ( $x=0$ ). Η μορφή του μέσου τη στιγμή αυτή, εμφανίζεται στο παραπάνω σχήμα. Τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα  $v=2\text{m/s}$ .



- i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.
- iii) Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές  $t_1=2\text{s}$  και  $t_2=3\text{s}$  και για την περιοχή που έχει σχηματισθεί το στάσιμο κύμα, στο ίδιο διάγραμμα.
- iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της δύναμης που ασκείται σε μια σημειακή μάζα  $\Sigma$ , μάζας  $m=1\text{mg}$ , η οποία βρίσκεται στη θέση  $x_1=3\text{m}$ , σε συνάρτηση με το χρόνο.

#### 84) Δύο τρέχοντα και ένα στάσιμο κύμα.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου που θεωρούμε ότι ταυτίζεται με τον άξονα  $x$ , διαδίδονται δύο όμοια κύματα πλάτους  $A=0,1\text{m}$ , τα οποία διαδίδονται αντίθετα. Τη στιγμή  $t=0$  το πρώτο κύμα φτάνει στο σημείο  $O$ , στη θέση  $x=0$ , ενώ το δεύτερο απέχει κατά  $1,5\text{m}$  από το  $O$ , όπως στο σχήμα.

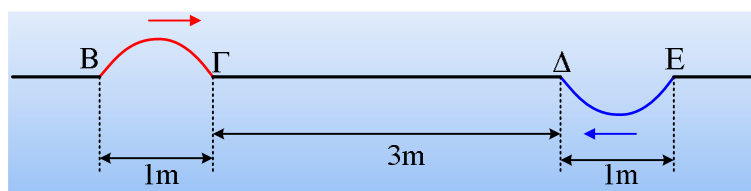


Αν το  $O$  θα φτάσει σε μέγιστη απομάκρυνση για πρώτη φορά τη στιγμή  $t'=0,25\text{s}$ , ζητούνται:

- i) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων.
- ii) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που θα προκύψει μετά την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.
- iii) Να βρείτε τη χρονική στιγμή  $t_1=2\text{s}$ , πόσοι δεσμοί και σε ποιες θέσεις έχουν σχηματισθεί.
- iv) Να κάνετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος και για την περιοχή που έχει σχηματισθεί, τη στιγμή  $t_1$ .

#### 85) Διάδοση και συμβολή δύο παλμών.

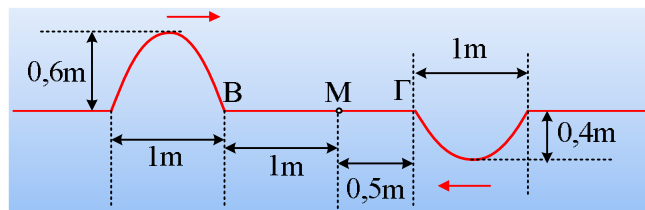
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται με αντίθετη κατεύθυνση δυο αρμονικοί παλμοί πλάτους  $A=0,2\text{m}$  με ταχύτητα  $1\text{m/s}$  και κάποια στιγμή που θεωρούμε  $t=0$ , απέχουν κατά  $3\text{m}$ , ενώ η εικόνα του μέσου, είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



- i) Λαμβάνοντας την θέση Γ σαν αρχή του άξονα ( $x=0$ ) να βρείτε τις εξισώσεις  $y=f(t,x)$  που περιγράφουν τους παραπάνω παλμούς.
- ii) Να γράψετε την εξίσωση  $y=f(t,x)$  για το αποτέλεσμα της συμβολής των παραπάνω παλμών.
- iii) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_1=2s$ . Σε δύο παράλληλα σχήματα, να σχεδιάσετε επίσης τη μορφή του μέσου, αν:
  - α) Στο μέσον διαδιδόταν μόνο η κυματομορφή που διαδίδεται προς τα δεξιά
  - β) Στο μέσον διαδιδόταν μόνο η άλλη κυματομορφή.
- iv) Να υπολογιστούν την παραπάνω χρονική στιγμή, οι ταχύτητες ταλάντωσης τριών σημείων του μέσου, Κ, Λ και Μ, στις θέσεις  $x_1=1m$ ,  $x_2=1,5m$  και  $x_3=2m$  αντίστοιχα.

### 86) Συμβολή δύο παλμών.

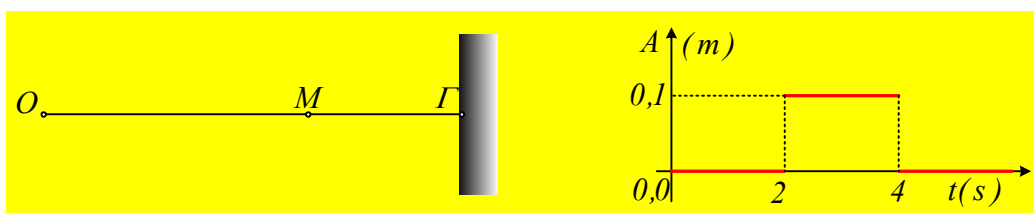
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδονται αντίθετα δύο αρμονικοί παλμοί και σε μια στιγμή που θεωρούμε  $t_0=0$ , η μορφή του μέσου, είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



Το χρονικό διάστημα που διαρκεί η ταλάντωση του σημείου Β είναι  $\Delta t=1s$ . Αντλώντας δεδομένα από το παραπάνω σχήμα, να υπολογίσετε για την χρονική στιγμή  $t' = \frac{7}{6}s$ , την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου Μ.

### 87) Ένα στάσιμο κύμα σε νήμα και ταλαντώσεις σημείων.

Το άκρο Γ, ενός τεντωμένου οριζόντιου νήματος ΟΓ είναι δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Τη στιγμή  $t_0=0$  το άκρο Ο τίθεται σε κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση, με εξίσωση  $y=A\eta\mu 2\pi t$ , οπότε κατά μήκος του νήματος διαδίδεται ένα εγκάρσιο κύμα με μήκος κύματος  $\lambda=1,2m$ . Θεωρούμε ότι το κύμα διαδίδεται χωρίς αποσβέσεις, με σταθερό πλάτος. Η γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης ενός σημείου Μ του νήματος, σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται στο διπλανό διάγραμμα, ενώ το άκρο Ο συνεχίζει να ταλαντώνεται μέχρι τη στιγμή  $t=6s$ .



- i) Πόσο απέχει το σημείο Μ από το άκρο Ο και πόσο είναι το μήκος του νήματος;
- ii) Ένα σημείο Ν είναι δεξιότερα του Μ σε απόσταση  $(MN)=0,3m$ . Να κάνετε τη γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης του σημείου Ν σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη στιγμή  $t=6s$ .

- iii) Να κάνετε επίσης την αντίστοιχη γραφική παράσταση για το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου P, το οποίο είναι αριστερότερα του M σε απόσταση  $(PM)=0,1\text{m}$ , για το ίδιο χρονικό διάστημα.

### 88) Φάσεις και γραφικές παραστάσεις στην επιφανειακή συμβολή.

Στην επιφάνεια ενός ηρεμούντος υγρού τη στιγμή  $t_0=0$  τίθενται σε ταλάντωση ταυτόχρονα δυο πηγές με συχνότητα  $1\text{Hz}$  και με πλάτος  $3\text{mm}$ , οπότε δημιουργούν κύματα τα οποία θεωρούμε ότι διαδίδονται με σταθερό πλάτος. Κάθε σημείο στο οποίο φτάνει ένα κύμα ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα πάνω. Ένα σημείο Σ απέχει αποστάσεις  $0,6\text{m}$  και  $1,2\text{m}$  από τις πηγές και το πρώτο κύμα, φτάνει στο Σ τη στιγμή  $t_1=3\text{s}$ .

- Να υπολογιστούν η ταχύτητα διάδοσης του κύματος και το μήκος του κύματος.
- Αφού βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων, να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Σ, μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων.
- Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις:
  - της απομάκρυνσης του σημείου Σ και
  - της φάσης της απομάκρυνσης του Σ
 μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_3=10\text{s}$ .

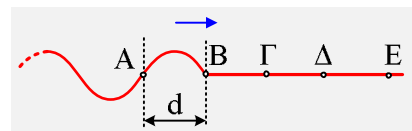
### 89) Ταλάντωση ενός σημείου κατά την διάδοση κύματος.

Στην άκρη Ο μιας ομογενούς χορδής βρίσκεται πηγή κύματος η οποία ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση  $y=0,1\sin(4\pi t)$  (μονάδες στο S.I.). Το εγκάρσιο κύμα που παράγεται διαδίδεται με ταχύτητα  $2\text{m/s}$ . Ένα σημείο Σ απέχει  $1,25\text{m}$  από το άκρο Ο.

- Να βρεθεί η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης που πραγματοποιεί το σημείο Σ, καθώς και η ταχύτητά του τις χρονικές στιγμές:
  - $t_1=0,5\text{s}$  και
  - $t_2=1,5\text{s}$
- Βρείτε την κινητική ενέργεια και τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε μια στοιχειώδη μάζα της χορδής  $10^{-6}\text{kg}$ , η οποία βρίσκεται στο Σ τη χρονική στιγμή  $t_3=2\text{s}$ .

### 90) Από ένα στιγμιότυπο φάσεις και εξισώσεις κύματος.

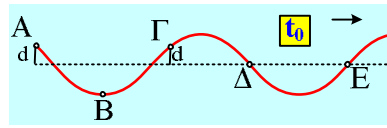
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα, από τα αριστερά προς τα δεξιά, με συχνότητα  $0,5\text{Hz}$  και στο σχήμα βλέπετε ένα στιγμιότυπο του κύματος, κάποια στιγμή  $t_0$ . Δίνονται οι αποστάσεις  $(AB)=(B\Gamma)=(\Gamma\Delta)=(\Delta E)=d=1\text{m}$ , ενώ η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σημείου A είναι  $0,4\text{m}$ .



- Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος μετά από χρονικό διάστημα  $2,5\text{s}$ .
- Να βρεθεί η φάση των σημείων A, B, Γ, Δ και E τη στιγμή  $t_0$ , καθώς και τη χρονική στιγμή  $t_0+2,5\text{s}$ .
- Αν το παραπάνω στιγμιότυπο δείχνει την εικόνα του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_0=0$ , ενώ για να γράψουμε την εξίσωση του κύματος, ορίζουμε ως αρχή του άξονα ( $x=0$ ) το σημείο A, να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

- iv) Ποια θα ήταν αντίστοιχα η εξίσωση του κύματος, αν αλλάζαμε την αρχή του άξονα και παίρναμε  $x=0$ , το σημείο Γ;

**91) Κάποια ερωτήματα πάνω σε μια κυματομορφή.**



Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, πλάτους  $0,2\text{m}$ , διαδίδεται κατά μήκος ενός ελαστικού γραμμικού μέσου, από αριστερά προς τα δεξιά και σε μια στιγμή  $t_0$ , η μορφή μιας περιοχής του μέσου, είναι αυτή του σχήματος.

- i) Να σημειωθούν πάνω στο σχήμα οι ταχύτητες των σημείων A και E.
- ii) Αν το σημείο B έχει διπλάσια κατά μέτρο επιτάχυνση, από το σημείο A, να βρεθεί η απομάκρυνση d.
- iii) Να βρεθεί ο λόγος  $\frac{v_A}{v_\Delta}$  των ταχυτήτων ταλάντωσης των σημείων A και Δ τη στιγμή  $t_0$ .

iv) Να βρεθεί η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων:

α) Δ και E    β) B και Δ    γ) Γ και Δ.

v) Αν κάποια στιγμή η φάση της απομάκρυνσης του σημείου E είναι  $\frac{13\pi}{4}$  ποια είναι η αντίστοιχες φάσεις

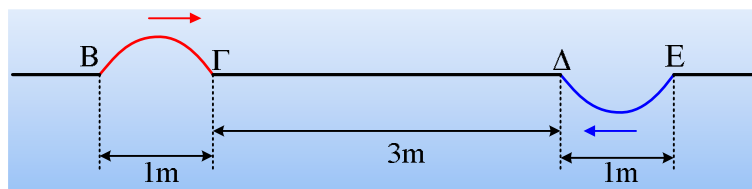
των σημείων Δ και Γ;

vi) Να σχεδιάσετε τη μορφή της ίδιας περιοχής του μέσου διάδοσης, τη χρονική στιγμή  $t_1=t_0+T/4$ , όπου T η περίοδος του κύματος.

## Ασκήσεις 2008-12

### 92) Διάδοση και συμβολή δύο παλμών.

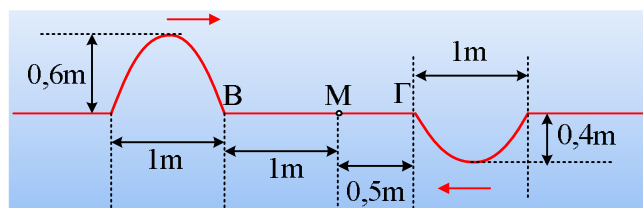
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται με αντίθετη κατεύθυνση δυο αρμονικοί παλμοί πλάτους  $A=0,2\text{m}$  με ταχύτητα  $1\text{m/s}$  και κάποια στιγμή που θεωρούμε  $t=0$ , απέχουν κατά  $3\text{m}$ , ενώ η εικόνα του μέσου, είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



- i) Λαμβάνοντας την θέση  $\Gamma$  σαν αρχή του άξονα ( $x=0$ ) να βρείτε τις εξισώσεις  $y=f(t,x)$  που περιγράφουν τους παραπάνω παλμούς.
- ii) Να γράψετε την εξίσωση  $y=f(t,x)$  για το αποτέλεσμα της συμβολής των παραπάνω παλμών.
- iii) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_1=2\text{s}$ . Σε δύο παράλληλα σχήματα, να σχεδιάσετε επίσης τη μορφή του μέσου, αν:
  - α) Στο μέσον διαδιδόταν μόνο η κυματομορφή που διαδίδεται προς τα δεξιά
  - β) Στο μέσον διαδιδόταν μόνο η άλλη κυματομορφή.
- iv) Να υπολογιστούν την παραπάνω χρονική στιγμή, οι ταχύτητες ταλάντωσης τριών σημείων του μέσου,  $K$ ,  $\Lambda$  και  $M$ , στις θέσεις  $x_1=1\text{m}$ ,  $x_2=1,5\text{m}$  και  $x_3=2\text{m}$  αντίστοιχα.

### 93) Συμβολή δύο παλμών.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδονται αντίθετα δύο αρμονικοί παλμοί και σε μια στιγμή που θεωρούμε  $t_0=0$ , η μορφή του μέσου, είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



Το χρονικό διάστημα που διαρκεί η ταλάντωση του σημείου  $B$  είναι  $\Delta t=1\text{s}$ . Αντλώντας δεδομένα από το

παραπάνω σχήμα, να υπολογίσετε για την χρονική στιγμή  $t' = \frac{7}{6} s$ , την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου M.

**94) Το πλάτος ταλάντωσης κατά την επιφανειακή συμβολή.**



Στην παραπάνω εικόνα, βλέπουμε τη διάδοση ενός κύματος στην επιφάνεια ενός υγρού. Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι όταν απομακρυνόμαστε από την πηγή, το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται. Αυτό δικαιολογείται, αφού καθώς το κύμα απλώνεται στην επιφάνεια, η ενέργεια ταλάντωσης διαμοιράζεται συνεχώς και σε περισσότερα υλικά σημεία.

Έστω τώρα ότι στην επιφάνεια ενός υγρού, έχουμε δύο σύγχρονες πηγές κύματος  $O_1$  και  $O_2$  οι οποίες αρχίζουν να ταλαντώνονται κατακόρυφα, τη στιγμή  $t_0=0$ , με εξισώσεις  $y=0,05 \cdot \eta\mu 2\pi t$  (μονάδες στο S.I.) δημιουργώντας έτσι εγκάρσια κύματα, τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα  $0,4m/s$ . Η απόσταση των δύο πηγών είναι  $0,8m$ . Παρατηρούμε ότι ένα σημείο M, στο μέσον της απόστασης των δύο πηγών ταλαντώνεται με πλάτος  $8cm$ .

- i) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου M.  
 ii) Το σημείο Σ, απέχει αποστάσεις  $r_1=0,4m$  και  $r_2=0,8m$  από τις δυο πηγές αντίστοιχα. Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ, μετά την συμβολή των δύο κυμάτων μπορεί να είναι:

α)  $0,02m$       β)  $0,04m$       γ)  $0,06m$       δ)  $0,08m$

- iii) Ένα άλλο σημείο P, απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις  $r_1=0,6m$  και  $r_2=0,4m$  αντίστοιχα. Το κύμα από την πρώτη πηγή, φτάνοντας στο σημείο P έχει πλάτος  $0,03m$ . Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου P, μετά την συμβολή των δύο κυμάτων.

**95) Δυο πηγές που δεν συγχρονίστηκαν.**

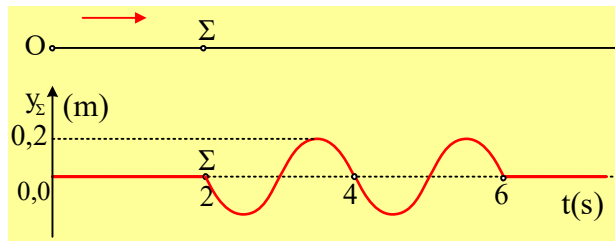
Στην επιφάνεια ενός υγρού ηρεμούν δυο πηγές κυμάτων  $O_1$  και  $O_2$ , που μπορούν να εκτελέσουν κατακόρυφες αρμονικές ταλαντώσεις πλάτους  $A=0,2m$  με συχνότητα  $f=1Hz$ , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $(O_1O_2)=4m$ . Κάποια στιγμή, έστω  $t=0$ , η πηγή  $O_1$  ξεκινά την ταλάντωσή της κινούμενη προς τα πάνω. Η πηγή  $O_2$  όμως καθυστερεί να ξεκινήσει την ταλάντωσή της κατά  $0,5s$ , κινούμενη με τον ίδιο τρόπο. Στην επιφάνεια του υγρού διαδίδονται έτσι δύο κύματα, τα οποία δεχόμαστε ότι διατηρούν σταθερό πλάτος, με ταχύτητα  $v=2m/s$ .

- i) Από ποιες εξισώσεις περιγράφονται τα κύματα που δημιουργούνται;  
 ii) Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου M, το οποίο βρίσκεται στο μέσον του τμήματος  $O_1O_2$ .  
 iii) Ένα άλλο σημείο Σ ταλαντώνεται με πλάτος  $0,4m$ , μετά την συμβολή των δύο κυμάτων. Να βρεθεί μια

σχέση που συνδέει τις αποστάσεις  $r_1$  και  $r_2$  του σημείου  $\Sigma$  από τις δύο πηγές.

iv) Πόσες υπερβολές ενισχυτικής συμβολής σχηματίζονται στην επιφάνεια του υγρού;

### 96) Πληροφορίες από την ταλάντωση ενός σημείου.



Στο άκρο  $O$  ενός γραμμικού ελαστικού μέσου όπου παίρνουμε  $x=0$ , υπάρχει μια πηγή εγκάρσιου αρμονικού κύματος, η οποία αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή  $t_0=0$ . Το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά και το γράφημα της απομάκρυνσης ενός σημείου  $\Sigma$ , το οποίο απέχει κατά  $2\text{m}$  από την πηγή, είναι αυτό του παραπάνω σχήματος. Αντλώντας πληροφορίες από το διάγραμμα αυτό, να απαντήσετε στις ακόλουθες ερωτήσεις:

- Να βρεθούν η περίοδος, το πλάτος και το μήκος του κύματος.
- Πόσες συνολικά ταλαντώσεις εκτέλεσε η πηγή του κύματος;
- Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
- Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα του κύματος τις χρονικές στιγμές:

$$\alpha) t_1=1,5\text{s}, \quad \beta) t_2=3\text{s} \quad \text{και} \quad \gamma) t_3=7,5\text{s}.$$

Πάνω στα στιγμιότυπα αυτά να σημειωθεί η θέση του σημείου  $\Sigma$ .

### 97) Ένα κύμα και η ταλάντωση σημείου.

Στο άκρο  $O$  ενός οριζόντιου γραμμικού ελαστικού μέσου, υπάρχει μια πηγή κύματος, η οποία αρχίζει να ταλαντώνεται αρμονικά, σε κατακόρυφη διεύθυνση, κινούμενη αρχικά προς την θετική κατεύθυνση (προς τα πάνω), τη στιγμή  $t_0=0$ . Το πλάτος ταλάντωσης της πηγής είναι  $0,2\text{m}$  και η συχνότητά της  $1\text{Hz}$ . Η διάρκεια της ταλάντωσης της πηγής είναι  $\Delta t=2,5\text{s}$ . Το παραγόμενο κύμα φτάνει σε ένα σημείο  $\Sigma$  του μέσου, το οποίο απέχει  $2,5\text{m}$  από το άκρο  $O$ , τη στιγμή  $t_1=1,25\text{s}$ .

- Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος, θεωρώντας αρχή του άξονα ( $x=0$ ) το άκρο  $O$ .
- Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα του κύματος τις χρονικές στιγμές:

$$\alpha) t_2=1,75\text{s} \quad \text{και} \quad \beta) t_3=4\text{s}.$$

- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου  $\Sigma$ , σε συνάρτηση με το χρόνο.

### 98) Δύο τρέχοντα κύματα και η συμβολή τους.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδονται δύο εγκάρσια κύματα με αντίθετες κατευθύνσεις. Τα κύματα φτάνουν τη στιγμή  $t=0$ , σε ένα σημείο του μέσου  $\Sigma$ , στη θέση  $x_\Sigma=4\text{m}$ . Το σημείο αυτό εξαιτίας κάθε κύματος ξεκινά να ταλαντώνεται με εξίσωση  $y=0,2 \cdot \eta\mu\pi t$  (S.I.). Αν η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι  $v=2\text{m/s}$ , ζητούνται:

- Η περίοδος και το μήκος κύματος κάθε κύματος.

- ii) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων.
- iii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου που προκύπτει από την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.
- iv) Πόσοι δεσμοί έχουν σχηματιστεί πάνω στο μέσο τη χρονική στιγμή  $t_1=1,5s$ ;
- v) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου την στιγμή  $t_1$ .
- vi) Δύο υλικά σημεία Μ και Ν βρίσκονται δεξιά και αριστερά της θέσης  $x=7m$  και έχουν ίσες απομακρύνσεις, από τη θέση ισορροπίας τους. Το σημείο Μ είναι το πλησιέστερο στη θέση  $x=7m$  σημείο με την παραπάνω ιδιότητα. Ποιο υλικό σημείο τη στιγμή  $t_1$  έχει:
  - α) Μεγαλύτερη ταχύτητα ταλάντωσης.
  - β) Μεγαλύτερη ενέργεια ταλάντωσης.

### 99) Εξισώσεις κυμάτων και συμβολή τους.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά (προς την θετική κατεύθυνση), διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, το οποίο φτάνει τη στιγμή  $t_0=0$ , στο σημείο Ο, στη θέση  $x=0$ . Το σημείο Ο αρχίζει την ταλάντωσή του από την θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση και φτάνει στην ακραία θέση της ταλάντωσής του τη στιγμή  $t_1=0,5s$ , ενώ στο μεταξύ το κύμα έχει διαδοθεί κατά  $0,25m$ , δεξιότερα του Ο. Η απόσταση των δύο ακραίων θέσεων ταλάντωσης του Ο είναι  $0,4m$ .

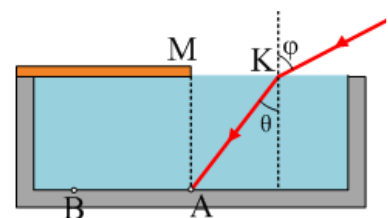
- i) Να υπολογιστούν η περίοδος, το πλάτος και το μήκος του κύματος.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- iii) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_2=3s$ , για τα σημεία του θετικού ημι-ξονα.

Κατά μήκος του ίδιου ελαστικού μέσου, διαδίδεται ταυτόχρονα ένα δεύτερο κύμα, από δεξιά προς τα αριστερά, με την ίδια συχνότητα και πλάτος, το οποίο τη στιγμή  $t_0=0$  φτάνει σε ένα σημείο Κ, στη θέση  $x_K=3,5m$ , το οποίο επίσης αρχίζει να ταλαντώνεται προς την θετική κατεύθυνση.

- iv) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος αυτού.
- v) Τα δύο κύματα συμβάλλουν και έτσι προκύπτει ένα στάσιμο κύμα. Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών στην περιοχή  $0 \leq x \leq 3,5m$
- vi) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στην παραπάνω περιοχή τη χρονική στιγμή  $t_3=9s$ .

### 100) Μπορούμε να φωτίσουμε το σημείο;

Διαθέτουμε ένα δοχείο με βάθος  $h=40cm$ , το οποίο είναι γεμάτο πλήρως με υγρό με δείκτη διάθλασης  $n=\sqrt{2}$ , για μια μονοχρωματική ακτινοβολία φωτός, που παράγεται από μια συσκευή Laser. Στο πάνω μέρος, είναι καλυμμένη με αδιαφανές κάλυμα, η μισή ελεύθερη επιφάνεια του δοχείου, όπως στο σχήμα. Στον πυθμένα του δοχείου υπάρχουν δύο σημεία Α και Β, όπως στο σχήμα, όπου  $(AB)=40cm$ .



- i) Μια ακτίνα φωτός φτάνει στο σημείο Α, αφού διαθλαστεί στο σημείο Κ, όπου  $(MK)=30cm$ . Να βρεθεί η γωνία πρόσπτωσης  $\varphi$ .



- ii) Μπορούμε να ρίξουμε φως στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, σε σημείο Λ δεξιά του Κ και να φωτίσουμε το σημείο Α ;
- iii) Να εξετάσετε αν θα μπορούσαμε να φωτίσουμε το σημείο Β, με χρήση ακτίνας από την ίδια συσκευή Laser.

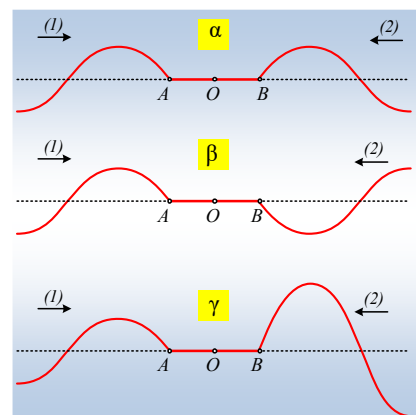
### 101) Άλλο ένα στάσιμο σε χορδή και η εξίσωσή του.

Μια χορδή με σταθερά άκρα διεγείρεται οπότε δημιουργείται πάνω της ένα στάσιμο κύμα με 7 δεσμούς (εκτός των δύο άκρων). Η πρώτη κοιλία Κ<sub>1</sub> απέχει 3cm από το αριστερό άκρο της χορδής και τη στιγμή που θεωρούμε  $t=0$ , έχει μέγιστη ταχύτητα με τιμή  $40\pi$  cm/s, ενώ τη στιγμή  $t_1=0,05$ s η ταχύτητά της είναι  $v_1=-40\pi$  cm/s, για πρώτη φορά.

- i) Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης της κοιλίας Κ<sub>1</sub>, καθώς και το μήκος L της χορδής.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος, θεωρώντας ότι η πρώτη κοιλία βρίσκεται στη θέση  $x=0$ .
- iii) Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα της χορδής τις χρονικές στιγμές  $t_2=1/40$ s και  $t_3=1/16$ s, στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- iv) Να βρεθεί η εξίσωση του ίδιου στάσιμου, θεωρώντας  $x=0$  το αριστερό άκρο της χορδής.

### 102) Δύο κύματα που διαδίδονται αντίθετα

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται αντίθετα δύο αρμονικά κύματα με το ίδιο μήκος κύματος και στα διπλανά σχήματα έχουμε πάρει στιγμιότυπα τη στιγμή που τα κύματα έχουν φτάσει στα σημεία Α και Β του ελαστικού μέσου.



- i) Να εξηγήσετε γιατί τα δυο κύματα θα συμβάλουν στο μέσον Ο του τμήματος ΑΒ.
- ii) Στο σχήμα α, όπου τα δυο κύματα έχουν το ίδιο πλάτος τι θα προκύψει μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Ο;

α) Θα σχηματισθεί δεσμός, β) θα σχηματισθεί κοιλία του στάσιμου, γ) τίποτα από τα δύο.

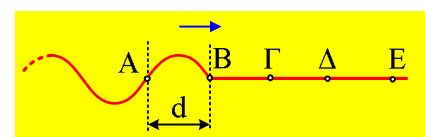
- iii) Ποια η αντίστοιχη απάντηση για τα κύματα του σχήματος β, επίσης ίδιου πλάτους;

- iv) Στο σχήμα γ, το πλάτος του κύματος (2) είναι διπλάσιο από το αντίστοιχο πλάτος του (1) κύματος ( $A_2=2A_1=2\cdot A$ ). Να εξετασθεί αν σχηματισθεί στάσιμο κύμα μετά την συμβολή των δύο κυμάτων.

Να δικαιολογήσετε αναλυτικά τις απαντήσεις σας.

### 103) Από ένα στιγμιότυπο φάσεις και εξισώσεις κύματος.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα, από τα αριστερά προς τα δεξιά, με συχνότητα  $0,5$  Hz και στο σχήμα βλέπετε ένα στιγμιότυπο του κύματος, κάποια στιγμή  $t_0$ . Δίνονται οι αποστάσεις  $(AB)=(B\Gamma)=(\Gamma\Delta)=(\Delta E)=d=1$  m, ενώ η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σημείου Α είναι  $0,4$  m.



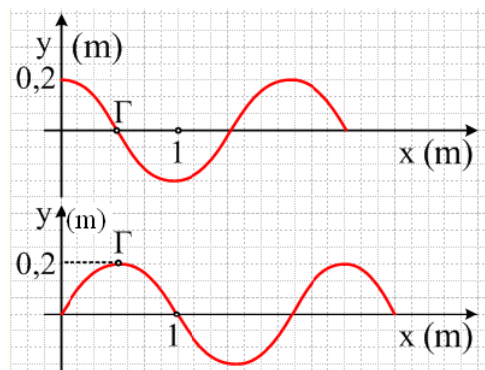
- i) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος μετά από χρονικό διάστημα 2,5 s.
- ii) Να βρεθεί η φάση των σημείων Α, Β, Γ, Δ και Ε τη στιγμή  $t_0$ , καθώς και τη χρονική στιγμή  $t_0+2,5$  s.
- iii) Αν το παραπάνω στιγμιότυπο δείχνει την εικόνα του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_0=0$ , ενώ για να γράψουμε την εξίσωση του κύματος, ορίζουμε ως αρχή του άξονα ( $x=0$ ) το σημείο Α, να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- iv) Ποια θα ήταν αντίστοιχα η εξίσωση του κύματος, αν αλλάζαμε την αρχή του άξονα και παίρναμε  $x=0$ , το σημείο Γ;

#### 104) Κύμα προς τ' αριστερά, φάση και στιγμιότυπα.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από δεξιά προς τ' αριστερά διαδίδεται ένα κύμα πλάτους  $A=0,1\text{m}$  και μήκους κύματος  $\lambda=1\text{m}$ . Τη χρονική στιγμή  $t_0=0$  το κύμα φτάνει στο σημείο Ο, στη θέση  $x=0$ , οπότε το σημείο αυτό αρχίζει την ταλάντωσή του, κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση και φτάνει στην ακραία θέση της ταλάντωσης τη στιγμή  $t_1=0,5\text{s}$ . Θεωρούμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική.

- i) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- ii) Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα του κύματος για μια περιοχή μεταξύ των σημείων Β και Γ του μέσου στις θέσεις  $x_B=2,5\text{m}$  και  $x_\Gamma=-2\text{m}$ , τις χρονικές στιγμές  $t_1=2\text{s}$  και  $t_2=5,5\text{s}$ .
- iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της φάσης του σημείου Β σε συνάρτηση με το χρόνο.

#### 105) Από το στιγμιότυπο κύματος σε ταλάντωση σημείου.



Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο στιγμιότυπα ενός αρμονικού κύματος, τα οποία διαφέρουν χρονικά κατά  $\Delta t=0,25\text{s}$  και για τα σημεία δεξιά της θέσης  $x=0$ .

Αν το σημείο Γ του σχήματος ξεκίνησε την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή  $t_0=0$ , να βρεθούν:

- i) Το μήκος και η περίοδος του κύματος.
- ii) Η εξίσωση του κύματος.
- iii) Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, ενός σημείου Β, η φάση του οποίου υπολείπεται κατά  $7\pi/6$  της φάσης του σημείου Γ.
- iv) Να γίνει η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σημείου Β σε συνάρτηση με το χρόνο.

**106) Δύο κύματα προς την ίδια κατεύθυνση.**

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος  $A=0,2\text{m}$  και την ίδια συχνότητα  $f=2\text{Hz}$ . Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι ίση με  $v=2\text{m/s}$ . Σε ένα σημείο  $O$ , το οποίο θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων ( $x=0$ ), το πρώτο κύμα φτάνει κατά τη χρονική στιγμή  $t=0$  και το δεύτερο κύμα κατά τη χρονική στιγμή  $t_1=1\text{s}$ . Θεωρείστε ότι εξαιτίας κάθε κύματος το σημείο  $O$  αρχίζει να κινείται προς την θετική φορά.

- Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας των σημείων του μέσου, του θετικού ημιάξονα, μετά από τη συμβολή των δύο κυμάτων.
- Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου, για  $x>0$ , τη χρονική στιγμή  $t_2=2\text{s}$
- Ποιο το αντίστοιχο διάγραμμα αν το δεύτερο κύμα έφτανε στο σημείο  $O$  τη χρονική στιγμή  $t_1'=0,25\text{s}$ ;

**107) Δύο κύματα σε ένα ελαστικό μέσο.**

ΘΕΜΑ 2°:

Στα άκρα  $K$  και  $\Lambda$  ενός ελαστικού μέσου υπάρχουν δύο πηγές κύματος, οι οποίες αρχίζουν ταυτόχρονα να παράγουν εγκάρσια κύματα, τα οποία διαδίδονται κατά μήκος του μέσου. Η πρώτη πηγή ταλαντώνεται με περίοδο  $T=1\text{s}$  και παράγει κύματα με μήκος κύματος  $\lambda_1$ , ενώ η δεύτερη έχει περίοδο ταλάντωσης  $T_2=0,6\text{s}$ .

- Τα δύο κύματα θα συναντηθούν:
  - Στο μέσον  $M$  της  $K\Lambda$
  - Σε ένα σημείο μεταξύ  $K$  και  $M$ .
  - Σε σημείο μεταξύ  $M$  και  $\Lambda$ .
- Αν κάποια στιγμή πάνω στη χορδή έχει διαδοθεί το πρώτο κύμα σε απόσταση ίση με τρία μήκη κύματος ( $d_1=3\lambda_1$ ), τότε το δεύτερο κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση  $d_2$ , όπου:

$$\alpha) d_2=3\lambda_2 \quad \beta) d_2=4\lambda_2 \quad \gamma) d_2=5\lambda_2$$

Να δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

**108) Διάθλαση και νόμος του Snell.**

ΘΕΜΑ 2°:

Δίνεται η πορεία μιας μονοχρωματικής ακτίνας, καθώς διέρχεται από ένα ορθογώνιο πρίσμα όπου  $\varphi=60^\circ$ .

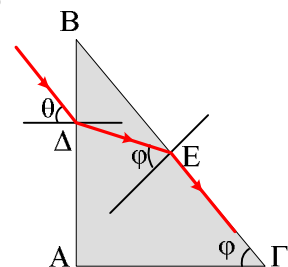
- Ο δείκτης διάθλασης του πρίσματος για την ακτινοβολία αυτή είναι ίσος με:

$$\alpha) \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \beta) \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \gamma) \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \delta) \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- Η γωνία διάθλασης στο σημείο  $\Delta$  είναι ίση με:

$$\alpha) 30^\circ, \quad \beta) 45^\circ, \quad \gamma) 60^\circ, \quad \delta) \text{άλλη τιμή.}$$

- Για τη γωνία πρόσπτωσης  $\theta$  στο σημείο  $\Delta$  ισχύει



$$α) \eta\mu\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \beta) \eta\mu\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \gamma) \eta\mu\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \delta) \eta\mu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Δίνονται  $\eta\mu 30^\circ = \text{συν} 60^\circ = 1/2$  και  $\text{συν} 30^\circ = \eta\mu 60^\circ = \sqrt{3}/2$ .

### 109) Ηλεκτρομαγνητικό κύμα

Οι παρακάτω εξισώσεις περιγράφουν ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό και ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα

$$E = 3 \cdot 10^2 \eta\mu 2\pi(8 \cdot 10^{11}t - 4 \cdot 10^3x) \text{ (S.I.)}$$

$$B = 10^{-6} \eta\mu 2\pi(8 \cdot 10^{11}t - 4 \cdot 10^3x) \text{ (S.I.)}$$

Οι εξισώσεις αυτές

- α. μπορεί να περιγράφουν ένα ηλεκτρομαγνητικό (H/M) κύμα που διαδίδεται στο κενό.
- β. μπορεί να περιγράφουν ένα H/M κύμα που διαδίδεται σε ένα υλικό.
- γ. δεν μπορεί να περιγράφουν ένα H/M κύμα.

Δίνεται η ταχύτητα του φωτός στο κενό  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

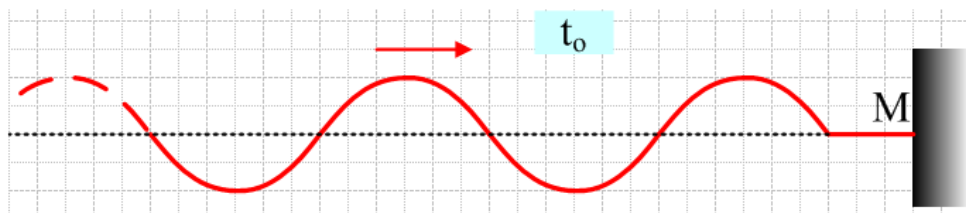
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας .

*Εξετάσεις ομογενών 2010*

### 110) Ανάκλαση κύματος σε σταθερό άκρο.

Κατά μήκος μια χορδής, με σταθερό το δεξιό άκρο της M, διαδίδεται ένα εγκάρσιο κύμα και η παρακάτω εικόνα δείχνει ένα στιγμιότυπο κάποια στιγμή  $t_0$ .



Να σχεδιάσετε τη μορφή της χορδής τις χρονικές στιγμές:

- α)  $t_0 + T/4$
- β)  $t_0 + T/2$
- γ)  $t_0 + 3T/4$ .

### 111) Άλλο ένα στάσιμο κύμα...

Πάνω σε μια χορδή μήκους 10m έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύμα. Για να το μελετήσουμε μαθηματικά, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων x-y, όπου σε ένα σημείο O, που απέχει 3m από το αριστερό άκρο του και είναι κοιλία, θεωρούμε  $x=0$ , ενώ θεωρούμε  $t=0$  τη στιγμή που το σημείο O βρίσκεται στην μέγιστη θετική απομάκρυνσή του, ίση με 0,4m. Έτσι η εξίσωση του στάσιμου παίρνει τη μορφή:

$$y = 2A \text{ συν}\left(\frac{\pi x}{2} + \phi_0\right) \cdot \eta\mu(2\pi t + \theta_0) \quad (\text{μονάδες στο S.I.)}$$

- i) Να βρεθούν τα  $\phi_0$ ,  $\theta_0$  και  $A$ .  
 ii) Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών του στάσιμου κύματος.  
 iii) Να σχεδιάστε στο ίδιο σύστημα αξόνων στιγμιότυπα του στάσιμου τις χρονικές στιγμές:

$$\alpha) t_1=0 \text{ και } \beta) t_2=0,75\text{s}$$

Σημειώστε πάνω στο διάγραμμα την ταχύτητα του σημείου  $O$ , τις παραπάνω χρονικές στιγμές.

- iv) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της φάσης της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, δύο σημείων  $B$  και  $\Gamma$ , που βρίσκονται στις θέσεις  $x_1=1,5\text{m}$  και  $x_2=3,5\text{m}$  αντίστοιχα, στους ίδιους άξονες.

### 112) Άλλο ένα στάσιμο κύμα...

Πάνω σε μια χορδή μήκους  $10\text{m}$  έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύμα. Για να το μελετήσουμε μαθηματικά, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων  $x-y$ , όπου σε ένα σημείο  $O$ , που απέχει  $3\text{m}$  από το αριστερό άκρο του και είναι κοιλία, θεωρούμε  $x=0$ , ενώ θεωρούμε  $t=0$  τη στιγμή που το σημείο  $O$  βρίσκεται στην μέγιστη θετική απομάκρυνσή του, ίση με  $0,4\text{m}$ . Έτσι η εξίσωση του στάσιμου παίρνει τη μορφή:

$$y=2A \text{ συν}\left(\frac{\pi x}{2} + \phi_0\right) \cdot \eta\mu(2\pi t + \theta_0) \quad (\text{μονάδες στο S.I.)}$$

- i) Να βρεθούν τα  $\phi_0$ ,  $\theta_0$  και  $A$ .  
 ii) Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών του στάσιμου κύματος.  
 iii) Να σχεδιάστε στο ίδιο σύστημα αξόνων στιγμιότυπα του στάσιμου τις χρονικές στιγμές:

$$\alpha) t_1=0 \text{ και } \beta) t_2=0,75\text{s}$$

Σημειώστε πάνω στο διάγραμμα την ταχύτητα του σημείου  $O$ , τις παραπάνω χρονικές στιγμές.

- iv) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της φάσης της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, δύο σημείων  $B$  και  $\Gamma$ , που βρίσκονται στις θέσεις  $x_1=1,5\text{m}$  και  $x_2=3,5\text{m}$  αντίστοιχα, στους ίδιους άξονες.

### 113) Κύματα σε γραμμικό ελαστικό μέσο.

Δύο σύγχρονες πηγές  $O_1$  και  $O_2$  παράγουν αρμονικά κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα  $v=2\text{m/s}$  κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου με άκρα τα σημεία  $O_1$  και  $O_2$  όπου  $(O_1O_2)=4\text{m}$ .



Η εξίσωση ταλάντωσης των πηγών είναι:

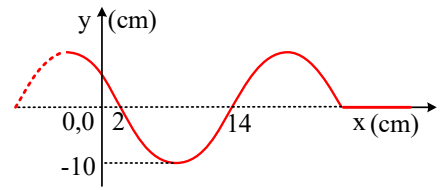
$$y=5 \eta\mu 2\pi t \quad (y! \text{ cm, } t! \text{ s})$$

- i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων που παράγονται θεωρώντας  $x=0$  τη θέση της πηγής  $O_1$ .  
 ii) Να σχεδιάστε στιγμιότυπα που να δείχνει την απομάκρυνση των διαφόρων σημείων του μέσου, σε συνάρτηση με την θέση τους  $x$ , τις χρονικές στιγμές:

$$\alpha) t_1=0,75\text{s.} \quad \beta) t_2=1,25\text{s και}$$

**114) Ένα κύμα, το στιγμιότυπο και άλλα..**

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από τα αριστερά προς τα δεξιά διαδίδεται ένα κύμα με ταχύτητα  $v=48\text{cm/s}$ . Η μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή  $t=0$  φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- v) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.  
 vi) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της φάσης των διαφόρων σημείων του μέσου με  $x>0$  τη χρονική στιγμή  $t_1=0,75\text{s}$ .  
 vii) Ένα σημείο M βρίσκεται στη θέση  $x_1=0,5\text{m}$ . Να βρείτε την επιτάχυνση ταλάντωσης του σημείου M σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.  $\pi^2 \approx 10$ .

**115) Υπερβολές ενίσχυσης και απόσβεσης κατά τη συμβολή.**

Στην επιφάνεια ενός υγρού διαδίδονται (ας υποθέσουμε με σταθερό πλάτος!!!) δύο κύματα που προέρχονται από δύο σύγχρονες πηγές, με μήκος κύματος  $\lambda=20\text{cm}$ .

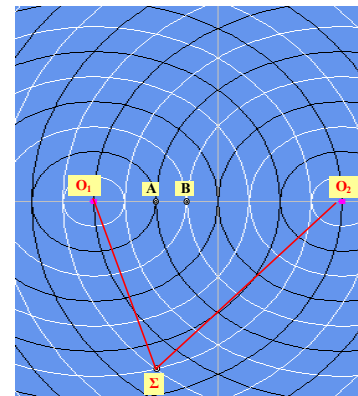
- α) Να βρεθούν τα σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος και να σημειωθούν πάνω στο σχήμα, όταν η απόσταση των πηγών είναι:

i)  $d=39\text{cm}$     ii)  $d=40\text{cm}$     iii)  $d=41\text{cm}$ ,    iv)  $30\text{cm}$

- β) Πάνω στα παραπάνω σχήματα να σχεδιαστούν και οι αντίστοιχες γραμμές που να εμφανίζουν τα σημεία που παραμένουν διαρκώς ακίνητα.

**116) Συμβολή κυμάτων από σύγχρονες πηγές.**

Στο σχήμα βλέπετε δύο σύγχρονες πηγές  $O_1$  και  $O_2$ , οι οποίες απέχουν  $d=1\text{m}$ , ταλαντώνονται με συχνότητα  $10\text{Hz}$  και παράγουν κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού, με πλάτος ταλάντωσης  $1\text{cm}$ . Οι λευκοί κύκλοι αποτελούν ισοφασικές γραμμές με φάση  $2k\pi$  και οι μαύροι κύκλοι με φάση  $(2k+1)\pi$ .

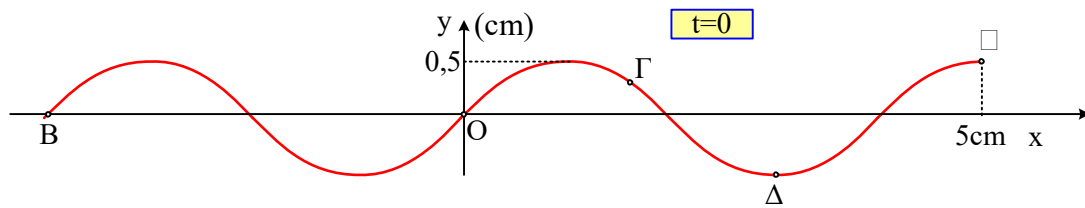


- viii) Ποια η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο κυμάτων που συμβάλουν στο σημείο A; Ποιο το πλάτος ταλάντωσης του σημείου αυτού;  
 ix) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις για το σημείο B;  
 x) Πόσο είναι το μήκος κύματος των δύο κυμάτων και πόσα σημεία μεταξύ των δύο πηγών ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος;  
 xi) Για το σημείο Σ του σχήματος ποια η διαφορά  $r_2-r_1$  των αποστάσεών του από τις δύο πηγές; Επιβεβαιώστε, μετρώντας τις δύο αποστάσεις με βάση το σχήμα.  
 xii) Πόσα τόξα ενισχυτικής συμβολής σχηματίζονται στην επιφάνεια του υγρού;  
 xiii) Αν αυξηθεί η συχνότητα ταλάντωσης των πηγών στην τιμή  $f_1=12,5\text{Hz}$ , να σχεδιάσετε τα τόξα ενισχυτικής συμβολής στην επιφάνεια του υγρού, μεταξύ των δύο πηγών.

**117) Ένα στιγμιότυπο κύματος.**

Ένα κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά (θετική κατεύθυνση) κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα τμήμα του στιγμιότυπου κάποια στιγμή, που θεωρούμε  $t=0$ , σε μια περιοχή

του μέσου, μεταξύ των σημείων Β και Ε. Δίνεται ότι τη στιγμή αυτή τα σημεία Δ και Ε έχουν μηδενική ταχύτητα ταλάντωσης.



Το σημείο Ο στη θέση  $x=0$ , θα φτάσει για πρώτη φορά σε απομάκρυνση  $0,5\text{cm}$  τη χρονική στιγμή  $t_1=0,3\text{s}$ .

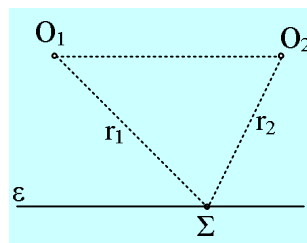
- Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τις ταχύτητες των σημείων Β, Ο και Γ τη στιγμή που ελήφθη το παραπάνω στιγμιότυπο.
- Να υπολογίσετε το πλάτος του κύματος, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σημείου Δ, για  $t=0$ .
- Να εξετάσετε αν το κύμα αυτό μπορεί να περιγραφεί από μια εξίσωση της μορφής:

$$y = A \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

- Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος αυτού, για την ίδια περιοχή, τη χρονική στιγμή  $t_2=0,1\text{s}$ .

### 118) Σημεία με απόσβεση μετά από συμβολή.

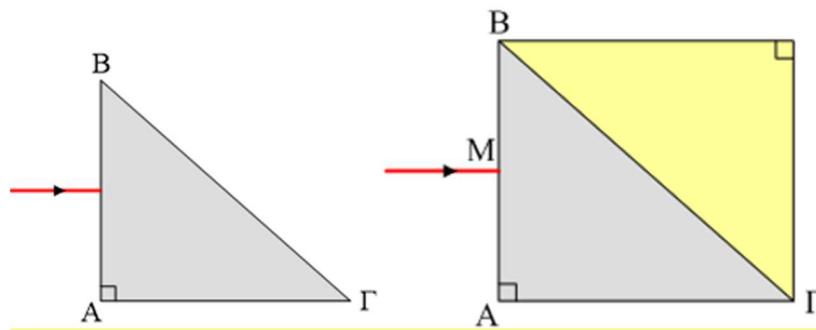
Στην επιφάνεια ενός υγρού βρίσκονται δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων  $O_1, O_2$ , οι οποίες αρχίζουν να ταλαντώνονται για  $t=0$  με εξισώσεις  $y_1=y_2=0,2\cdot\eta\mu\pi$  (μονάδες στο S.I.). Έτσι στην επιφάνεια του υγρού διαδίδονται δύο κύματα με σταθερό πλάτος και με μήκος κύματος  $\lambda=4\text{m}$ . Η απόσταση των δύο πηγών είναι  $d=5,8\text{m}$ , ενώ ένα σημείο Σ, απέχει αποστάσεις  $10\text{m}$  και  $8\text{m}$  από τις πηγές  $O_1, O_2$  αντίστοιχα.



- Ποιο το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ, μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων;
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου Σ, σε συνάρτηση με το χρόνο.
- Αν κινηθούμε κατά μήκος της ευθείας ε, παράλληλα προς το ευθύγραμμο τμήμα  $O_1O_2$ , πόσα ακόμη σημεία θα συναντήσουμε τα οποία θα έχουν το ίδιο πλάτος ταλάντωσης με το σημείο Σ;

### 119) Διάθλαση και κρίσιμη γωνία.

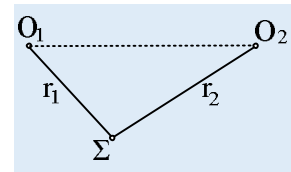
Η τομή ενός πρίσματος είναι ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές  $2\text{cm}$ . Μια μονοχρωματική ακτινοβολία με μήκος κύματος στο κενό  $\lambda_0=600\text{nm}$  προσπίπτει κάθετα στο μέσον της πλευράς ΑΒ, όπως στο σχήμα. Αν ο δείκτης διάθλασης του πρίσματος για την ακτινοβολία αυτή είναι  $n=1,5$ :



- i) Πόσα μήκη κύματος βρίσκονται κάθε στιγμή στο εσωτερικό του πρίσματος;
- ii) Τοποθετούμε ένα δεύτερο πρίσμα, με δείκτη διάθλαση  $n_1=1,2$  όπως στο παρακάτω σχήμα. Ποιος είναι τώρα ο αριθμός των μηκών κύματος που αντιστοιχεί στην διαδρομή της ακτινοβολίας στο πρώτο πρίσμα;

### 120) Συμβολή από μη σύγχρονες πηγές.

Δύο πηγές κυμάτων  $O_1$  και  $O_2$ , μπορούν να ταλαντώνονται σε κατακόρυφη διεύθυνση με συχνότητα  $1\text{Hz}$  και πλάτος  $0,1\text{m}$  και να δημιουργούν κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού, τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα  $2\text{m/s}$ . Οι πηγές ξεκινούν την ταλάντωσή τους από τη θέση ισορροπίας κινούμενες προς τη θετική κατεύθυνση, η πρώτη για  $t_0=0$  και η δεύτερη τη χρονική στιγμή  $t_1=0,75\text{s}$ .



- i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων που δημιουργούνται.
- ii) Ένα σημείο  $\Sigma$  απέχει αποστάσεις  $r_1=4\text{m}$  και  $r_2=4,5\text{m}$  από τις δύο πηγές. Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου  $\Sigma$  μετά από την συμβολή των δύο κυμάτων.
- iii) Πόση είναι η ενέργεια ταλάντωσης μιας στοιχειώδους μάζας  $m=1\text{mg}$  που βρίσκεται στο σημείο  $\Sigma$ ;

### 121) Ένα τρέχον και ένα στάσιμο κύμα.

A) Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και προς την θετική κατεύθυνση διαδίδεται ένα εγκάρσιο κύμα με εξίσωση:

$$y = 0,2 \eta\mu 2\pi(t-x/2) \quad (\text{S.I.})$$

- i) Να βρεθούν το μήκος και η ταχύτητα του κύματος.
  - ii) Να σχεδιάσετε στο ίδιο διάγραμμα στιγμιότυπα του κύματος για τις χρονικές στιγμές  $t_1=1,25\text{s}$  και  $t_2=2\text{s}$  και για την περιοχή  $-1 \leq x \leq 4\text{m}$ .
- B) Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα εξίσωση:

$$y = 0,2 \cdot \text{συν}\pi x \cdot \eta\mu 2\pi t \quad (\text{S.I.})$$

Να σχεδιάσετε στο ίδιο διάγραμμα στιγμιότυπα του κύματος για τις χρονικές στιγμές  $t_1=1,25\text{s}$  και  $t_2=1,75\text{s}$  και για την περιοχή  $-1 \leq x \leq 4\text{m}$ .

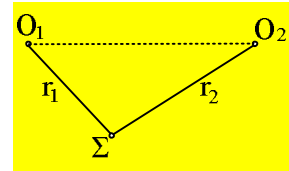
### 122) Οι δυο πηγές δεν ξεκινούν ταυτόχρονα

Δύο πηγές κυμάτων  $O_1$  και  $O_2$ , μπορούν να ταλαντώνονται σε κατακόρυφη διεύθυνση με συχνότητα  $1\text{Hz}$  και πλάτος  $0,1\text{m}$  και να δημιουργούν κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού, τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα  $2\text{m/s}$ . Οι πηγές ξεκινούν την ταλάντωσή τους από τη θέση ισορροπίας κινούμενες προς τη θετική κατεύθυνση, η



πρώτη για  $t_0=0$  και η δεύτερη τη χρονική στιγμή  $t_1=0,75s$ .

- Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων που δημιουργούνται.
- Ένα σημείο  $\Sigma$  απέχει αποστάσεις  $r_1=4m$  και  $r_2=4,5m$  από τις δύο πηγές. Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου  $\Sigma$  μετά από την συμβολή των δύο κυμάτων.
- Πόση είναι η ενέργεια ταλάντωσης μιας στοιχειώδους μάζας  $m=1mg$  που βρίσκεται στο σημείο  $\Sigma$ ;



### 123) Συμβολή κυμάτων ή απλά μελέτη στάσιμου κύματος.



Στην επιφάνεια ενός υγρού βρίσκονται δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων.

Τι συμβαίνει στο ευθύγραμμο τμήμα  $O_1-O_2$  που συνδέει τις δύο πηγές;

Στην περιοχή διαδίδονται δύο κύματα με το ίδιο πλάτος  $A$ , ίδια συχνότητα τα οποία διαδίδονται αντίθετα και συμβάλλουν.

- Για όσα σημεία, η διαφορά των αποστάσεών τους από τις δύο πηγές, είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος ( $r_1-r_2=k\cdot\lambda$ ), ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος  $A'=2A$ .
- Για όσα σημεία, η διαφορά των αποστάσεών τους από τις δύο πηγές, είναι περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος  $r_1-r_2=(2k+1)\cdot\lambda/2$ , παραμένουν ακίνητα.
- Προφανώς τα υπόλοιπα σημεία ταλαντώνονται με ενδιάμεσοι πλάτος από  $0-2A$ .

### 124) Κύματα σε δύο ελαστικά μέσα.

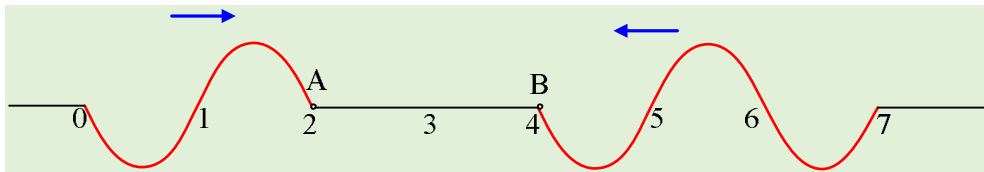


Δύο νήματα από διαφορετικό υλικό και με μήκη  $l_1=3m$  και  $l_2=2m$  είναι δεμένα μεταξύ τους στο σημείο  $O$  ενώ τα άλλα τους άκρα είναι δεμένα σε δύο τοίχους στα σημεία  $A$  και  $B$ . Αν το σημείο  $O$ , στη θέση  $x=0$ , τεθεί σε ταλάντωση σε κατακόρυφη διεύθυνση με εξίσωση απομάκρυνσης  $y=0,1\eta\mu 5\pi t$  (S.I.), δημιουργούνται δύο κύματα, ένα προς τα δεξιά και ένα προς τ' αριστερά. Τα κύματα φτάνουν στα άκρα  $A$  και  $B$  σε χρόνους  $t_1=2,4s$  και  $t_2=2s$  αντίστοιχα.

- Ποιες οι εξισώσεις των δύο κυμάτων;
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης των διαφόρων σημείων των νημάτων τη χρονική στιγμή  $t_2=0,7s$ .
- Να σχολιαστούν τα αποτελέσματα.

### 125) Αρχή της επαλληλίας και Συμβολή κυμάτων.

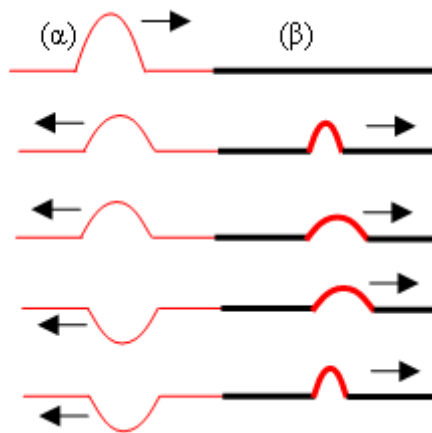
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται με ταχύτητα  $v=1m/s$  δύο κύματα ίδιου πλάτους και ίδιου μήκους κύματος και στο σχήμα φαίνεται η μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_0$ .



- α) Πόση είναι η φάση του σημείου A και πόση του σημείου B τη στιγμή αυτή;  
 β) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τις χρονικές στιγμές:  
 i)  $t_1 = t_0 + 1,5s$ ,    ii)  $t_2 = t_0 + 3s$ ,    iii)  $t_3 = t_0 + 4s$

### 126) Κύμα κατά μήκος δύο νημάτων.

Κατά μήκος ενός σχοινιού (α) διαδίδεται ο κυματοσυρμός του πρώτου σχήματος και μετά από λίγο φτάνει στο σχοινί (β), όπου η ταχύτητα του κύματος είναι μικρότερη.



- i) Ποιο από τα παρακάτω σχήματα είναι σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.  
 ii) Γιατί το πλάτος κατά την επιστροφή είναι μικρότερο;

### 127) Στάσιμο κύμα από ανάκλαση

Να ξεκινήσουμε με ένα ερώτημα:

Πότε ισχύει η γνωστή εξίσωση του βιβλίου

$$y = 2A \cdot \sin(2\pi x/\lambda) \cdot \eta\mu(2\pi t/T)$$

η οποία περιγράφει ένα στάσιμο κύμα;

Η εξίσωση αυτή προκύπτει με βάση την αρχή της επαλληλίας για δύο κύματα με εξισώσεις:

$$y_1 = A \eta\mu 2\pi(t/T - x/\lambda) \quad (1)$$

$$y_2 = A \eta\mu 2\pi(t/T + x/\lambda) \quad (2)$$

Η εξίσωση (1) ισχύει με την προϋπόθεση ότι το σημείο στη θέση  $x=0$ , για  $t=0$ ,  $y=0$  και  $v>0$  ή με λόγια με την προϋπόθεση ότι το σημείο στη θέση  $x=0$  για  $t=0$  περνά από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση.

Με τις ίδιες προϋποθέσεις ισχύει και η εξίσωση (2) για το κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά.

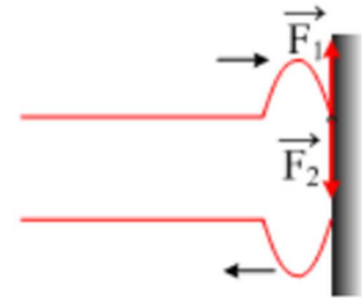
Ας προσέξουμε ότι δεν αναφερόμαστε για τη θέση που βρίσκεται η πηγή, αλλά μόνο για το τι συμβαίνει σε

ένα σημείο για το οποίο παίρνουμε αυθαίρετα  $x=0$  και στο οποίο σημείο εξ ορισμού θα δημιουργείται ΚΟΙΛΙΑ.

Το σχήμα του βιβλίου (σχ.2.16) που δείχνει ανάκλαση κύματος σε σταθερό σημείο, προφανώς δεν σχετίζεται με την απόδειξη του βιβλίου.

Τι συμβαίνει στην περίπτωση που ένα κύμα διαδίδεται κατά μήκος μιας χορδής, ξεκινώντας από το ένα της άκρο  $O$ , στο οποίο βρίσκεται η πηγή του κύματος και που το άλλο της άκρο  $\Gamma$  είναι σταθερό;

Έστω ότι κατά μήκος ενός τεντωμένου νήματος, το ένα άκρο του οποίου είναι δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο, διαδίδεται ένας κυματοσυρμός. Φτάνοντας στο σταθερό άκρο του νήματος, ασκεί στον τοίχο μια δύναμη  $F_1$  με φορά προς τα πάνω. Άρα με βάση την αρχή δράσης - αντίδρασης, δέχεται μια ίσου μέτρου δύναμη  $F_2$  με φορά προς τα κάτω. Το αποτέλεσμα είναι στην επιστροφή αντί για «όρος» να δημιουργείται «κοιλιά», όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Από Μαθηματική άποψη, το παραπάνω συμπέρασμα σημαίνει ότι μεταξύ προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος παρουσιάζεται διαφορά φάσεως ίση με  $\pi$ .

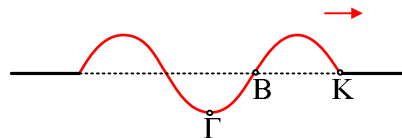
Συνήθως αναφέρεται ότι η εξίσωση για το κύμα προς τα αριστερά γράφεται:

$$y = A \sin\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{2}\right)$$

**Είναι έτσι τα πράγματα;**

.....

### 128) Διάδοση κυματομορφής.



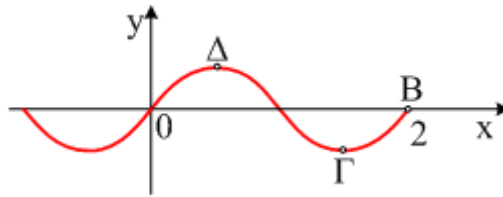
Μια κυματομορφή διαδίδεται προς τα δεξιά κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και στο σχήμα δίνεται η μορφή του μέσου κάποια στιγμή  $t_0$ . Τη στιγμή αυτή το σημείο  $B$  έχει ταχύτητα μέτρου  $\pi$  (m/s), ενώ το σημείο  $\Gamma$ , το οποίο απέχει οριζόντια απόσταση από το  $B$   $d=0,4$ m, δεν έχει ταχύτητα έχοντας κατακόρυφη εκτροπή  $0,2$ m.

vi) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη στιγμή  $t_0+0,4$ s.

vii) Να υπολογίσετε τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων  $K$  και  $\Gamma$  τη στιγμή αυτή.

### 129) Φάσεις σημείων σε ένα κύμα.

Δίνεται το στιγμιότυπο ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά.



Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.

1. Η εξίσωση του κύματος είναι της μορφής  $y = A\eta\mu 2\pi(t/T - x/\lambda)$
2. Η φάση του σημείου B είναι ίση με μηδέν.
3. Η φάση του σημείου Γ είναι ίση με  $1,5\pi$
4. Η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Δ και Γ είναι ίση με  $\pi$ .

### 130) Μια Συμβολή κυμάτων με διαφορετικές συχνότητες

Στις κορυφές B και Γ ισοπλευρού τριγώνου πλευράς  $a=0,5\text{m}$  βρίσκονται δύο πηγές κυμάτων, οι οποίες ταλαντώνονται σύμφωνα με τις εξισώσεις

$$y_B = 0,2\eta\mu 200\pi t \text{ και } y_\Gamma = 0,2\eta\mu 204\pi t \text{ (μονάδες S.I.)}$$

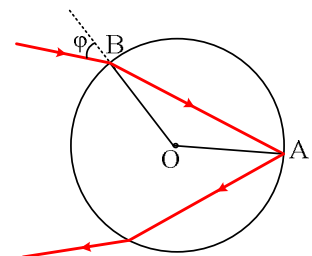
Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις:

- α) Η κορυφή A ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος  $A'=0,4\text{m}$ .
- β) Η συχνότητα ταλάντωσης της κορυφής A είναι  $f=101\text{Hz}$ .
- γ) Σε χρόνο  $1\text{s}$  το πλάτος ταλάντωσης της κορυφής A γίνεται δύο φορές  $0,4\text{m}$ .

### 131) Με αφορμή το Ουράνιο τόξο.....

Μια ακτίνα μονοχρωματικού φωτός προσπίπτει σε μια σφαιρική σταγόνα νερού (όπως στο ουράνιο τόξο), υπό γωνία  $\varphi$  και στο σχήμα φαίνεται η πορεία της μέχρι να εξέλθει από τη σταγόνα.

Στο βιβλίο λέγεται ότι στη θέση A η ακτίνα παθαίνει ολική εσωτερική ανάκλαση. Να εξετασθεί η ορθότητα της πρότασης αυτής.



### 132) Συμβολή σε γραμμικό ελαστικό μέσο.

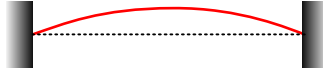
Δύο σύγχρονες πηγές  $O_1$  και  $O_2$  παράγουν αρμονικά κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα  $v=2\text{m/s}$  κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου με άκρα τα σημεία  $O_1$  και  $O_2$  όπου  $(O_1O_2)=4\text{m}$ . Η εξίσωση ταλάντωσης των πηγών είναι:

$$y = 5 \eta\mu 2\pi t \text{ (} y! \text{ cm, } t! \text{ s)}$$

- i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων που παράγονται θεωρώντας  $x=0$  τη θέση της πηγής  $O_1$ .
- ii) Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα που να δείχνει την απομάκρυνση των διαφόρων σημείων του μέσου, σε συνάρτηση με την θέση τους  $x$ , τις χρονικές στιγμές:
  - a)  $t_1 = 0,5\text{s}$ .
  - b)  $t_2 = 1,25\text{s}$

**133) Στάσιμο κύμα σε χορδή με σταθερά άκρα.**

Έστω μια χορδή μήκους  $L=2\text{m}$  η οποία είναι τεντωμένη. Τοποθετούμε στο μέσον της μια πηγή, η οποία θέτει σε ταλάντωση τη χορδή με συχνότητα  $f_0=2\text{Hz}$ . Μόλις αποκατασταθεί μόνιμη κατάσταση η μορφή της χορδής, κάποια στιγμή  $t_0$  είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



- i) Με ποια ταχύτητα διαδίδονται τα κύματα πάνω στη χορδή;
- ii) Αυξάνουμε τη συχνότητα της πηγής στη τιμή  $f'=3\text{Hz}$ . Να εξετασθεί αν πάνω στη χορδή σχηματίζεται στάσιμο κύμα.
- iii) Αυξάνουμε ξανά τη συχνότητα. Ποια είναι η επόμενη συχνότητα  $f_1$  για την οποία θα δημιουργηθεί ξανά στάσιμο κύμα πάνω στη χορδή;
- iv) Ποιες τελικά συχνότητες ήχου μπορούν να παραχθούν από την παραπάνω χορδή;

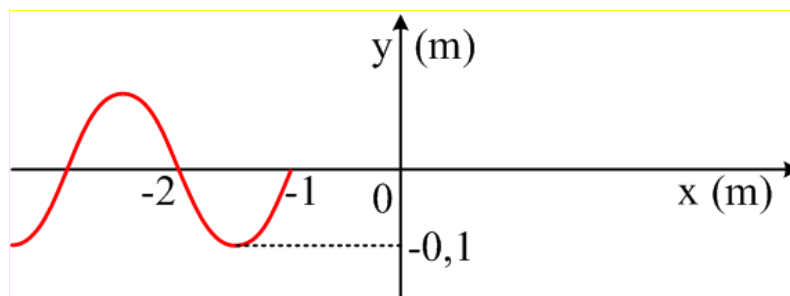
**134) Εξισώσεις διαφόρων κυμάτων.**

Ένα κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου με ταχύτητα  $2\text{m/s}$  και συχνότητα  $1\text{Hz}$ . Το πλάτος ταλάντωσης κάθε σημείου είναι  $A=0,1\text{m}$ . Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος αν η πηγή του κύματος που είναι στη θέση  $x=0$ :

- i) Για  $t=0$  περνά από τη θέση ισορροπίας της με θετική ταχύτητα.
- ii) Για  $t=0$  βρίσκεται στην ακραία θέση της με θετική απομάκρυνση, για πρώτη φορά.
- viii) Για  $t=0$  ξεκινά την ταλάντωσή της με ταχύτητα ταλάντωσης  $v=-\omega A$ .

**135) Ποια η εξίσωση και ποιο το στιγμιότυπο του κύματος;**

Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση του άξονα με ταχύτητα  $v=4\text{m/s}$  και για  $t=0$  η μορφή του μέσου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- i) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- ii) Να σχεδιασθεί το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_1=1\text{s}$
- iii) Να σχολιασθούν τα αποτελέσματα

**136) Ένα κύμα προς τ' αριστερά.**

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου που ταυτίζεται με τον άξονα  $x'Ox$ , διαδίδεται αρμονικό κύμα

με μήκος κύματος  $\lambda=2\text{m}$  προς την αρνητική κατεύθυνση. Το σημείο Ο στην αρχή ( $x=0$ ) του άξονα εκτελεί α.α.τ. με εξίσωση:

$$y=2\cdot\eta\mu 2\pi t. \text{ (S.I.)}$$

- Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για δύο υλικά σημεία Β και Γ που βρίσκονται στις θέσεις  $x_1=+1\text{m}$  και  $x_2=-2,5\text{m}$ .
- Τη στιγμή  $t_1$  το υλικό σημείο Β έχει ταχύτητα ταλάντωσης  $v_B=-\omega\cdot A$ . Ποια η απομάκρυνση του υλικού σημείου Γ τη στιγμή αυτή;

### 137) Ένα αρμονικό κύμα και η εξίσωση απομάκρυνσης ενός σημείου.

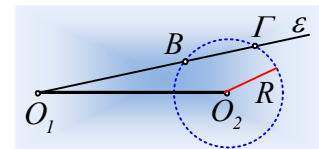
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου που ταυτίζεται με τον άξονα  $x'Ox$ , διαδίδεται αρμονικό κύμα με ταχύτητα  $v=2\text{m/s}$  προς τη θετική κατεύθυνση και για  $t=0$  φτάνει στο σημείο Ο στην αρχή ( $x=0$ ) του άξονα. Το υλικό σημείο που βρίσκεται στο Ο αρχίζει την ταλάντωσή του κινούμενο με μέγιστη θετική ταχύτητα. Η εξίσωση της απομάκρυνσης ενός υλικού σημείου Κ που βρίσκεται στη θέση  $x_K$  δίνεται από την εξίσωση:

$$y_K=0,1\cdot\eta\mu(4\pi t-2,5\pi)$$

- Ποια είναι η θέση του υλικού σημείου Κ;
- Ποια η ταχύτητα ταλάντωσης ενός υλικού σημείου που βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα, τη χρονική στιγμή  $t_1$  όπου το Κ έχει μηδενική ταχύτητα για δεύτερη φορά.
- Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή  $t_1$ .

### 138) Επιφανειακή συμβολή και πλάτη ταλάντωσης.

Στην επιφάνεια ενός υγρού υπάρχουν δύο σύγχρονες πηγές εγκάρσιων κυμάτων  $O_1$  και  $O_2$ , οι οποίες δημιουργούν επιφανειακά κύματα, με μήκος κύματος  $\lambda_1$ , τα οποία θεωρούμε ότι διαδίδονται με σταθερό πλάτος Α. Στο σχήμα βλέπετε έναν κύκλο ακτίνας R με κέντρο την πηγή  $O_2$  και μια ημιευθεία  $\epsilon$ , με αρχή την πηγή  $O_1$  η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Μετά από συμβολή των δύο κυμάτων, τα σημεία Β και Γ ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος, χωρίς να υπάρχει άλλο σημείο μεταξύ τους πάνω στην  $\epsilon$ , που να ταλαντώνεται με το πλάτος αυτό.



- Η απόσταση (ΒΓ) είναι ίση με:

$$\alpha) (B\Gamma)=\lambda_1/4, \quad \beta) (B\Gamma)=\lambda_1/2, \quad \gamma) (B\Gamma)=3\lambda_1/4, \quad \delta) (B\Gamma)=\lambda_1.$$

- Κατά την κίνησή μας κατά μήκος του τόξου ΒΓ, συναντάμε ένα σημείο Δ, το οποίο παραμένει ακίνητο.

Για τη διαφορά των αποστάσεων των σημείων Δ και Β από την πηγή  $O_1$  ισχύει:

$$\alpha) r_{1\Delta}-r_{1B}=\lambda_1/4, \quad \beta) r_{1\Delta}-r_{1B}=\lambda_1/2, \quad \gamma) r_{1\Delta}-r_{1B}=3\lambda_1/4, \quad \delta) r_{1\Delta}-r_{1B}=\lambda_1,$$

- Σταματάμε τις δυο πηγές και τις ξαναθέτουμε σε ταλάντωση, με διπλάσια συχνότητα και το ίδιο πλάτος.

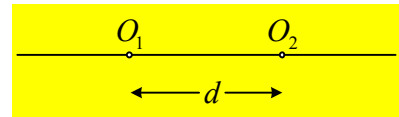
Μετά από την συμβολή των δύο κυμάτων:

- Ποιο το πλάτος ταλάντωσης των σημείων Β και Γ;

- Υπάρχουν άλλα σημεία πάνω στην χορδή ΒΓ που να ταλαντώνονται με πλάτος  $2A$ ;

**139) Δύο κύματα στο ίδιο γραμμικό ελαστικό μέσον.**

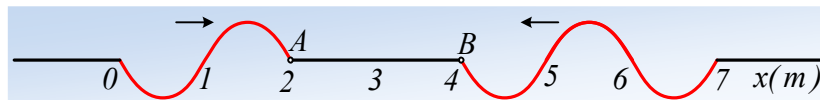
Σε δύο σημεία  $O_1$  και  $O_2$ , τα οποία απέχουν απόσταση  $(O_1O_2)=d=4\text{m}$ , ενός άπειρου γραμμικού ελαστικού μέσου, υπάρχουν δυο πηγές κύματος, οι οποίες αρχίζουν να ταλαντώνονται τη στιγμή  $t_0=0$  ταυτόχρονα, προς την θετική κατεύθυνση, με αποτέλεσμα να δημιουργούν κύματα με πλάτος  $0,4\text{m}$  και με συχνότητα  $1\text{Hz}$ . Τα κύματα που δημιουργούνται διαδίδονται και προς τις δύο κατευθύνσεις με ταχύτητα  $2\text{m/s}$ , χωρίς αποσβέσεις. Θεωρούμε τη θέση  $O_1$  ως αρχή του άξονα  $x$  και μας απασχολεί το τι συμβαίνει δεξιά της πηγής  $O_1$  ( $x>0$ ).



- i) Να γράψετε τις εξισώσεις των κυμάτων που διαδίδονται κατά μήκος του μέσου.
- ii) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_1=0,75\text{s}$ .
- iii) Να σχεδιάσετε επίσης τη μορφή του μέσου τις χρονικές στιγμές:
  - A)  $t_2=3\text{s}$  και
  - B)  $t_3=3,25\text{s}$ .

**140) Τρεις ερωτήσεις ενός Β' ΘΕΜΑΤΟΣ.****Ερώτηση 1η:**

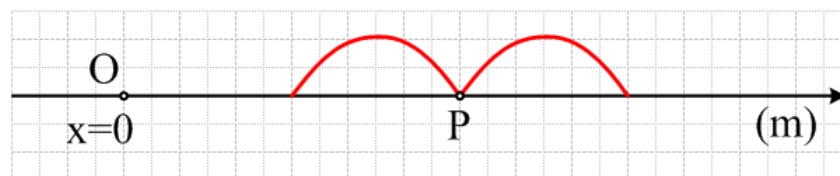
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται με ταχύτητα  $v=1\text{m/s}$  δύο κύματα ίδιου πλάτους και ίδιου μήκους κύματος και στο σχήμα φαίνεται η μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_0$ .



- i) Πόση είναι η φάση του σημείου A και πόση του σημείου B τη στιγμή αυτή;
- ii) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τις χρονικές στιγμές:
  - α)  $t_1=t_0+1,5\text{s}$ ,      β)  $t_2=t_0+3\text{s}$       γ)  $t_3=t_0+4\text{s}$

**141) Μια πηγή και δύο κύματα.**

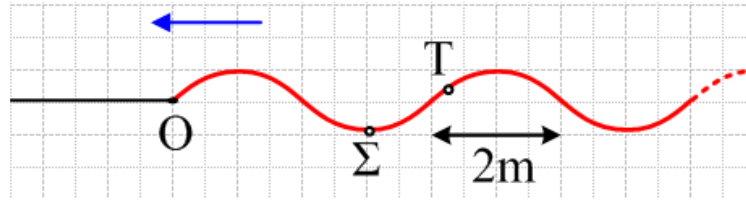
Στη θέση  $x_P=6\text{m}$  ενός γραμμικού ελαστικού μέσου υπάρχει μια πηγή κύματος P, η οποία για  $t=0$ , αρχίζει να ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση  $y=1\cdot\eta\mu(2\pi t)$  (μονάδες στο S.I.). Η μορφή του μέσου μετά από λίγο, τη στιγμή  $t_1$ , είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



- i) Πόσο είναι το πλάτος του κύματος και πόσο το μήκος του κύματος, με βάση την παραπάνω εικόνα;;
- ii) Να βρεθεί η στιγμή  $t_1$  στην οποία ελήφθη η παραπάνω εικόνα.
- iii) Να βρεθούν οι εξισώσεις των κυμάτων,  $y_1=f(t,x)$  και  $y_2=f(t,x)$ , για τα δύο κύματα που κινούνται προς τα δεξιά και προς τ' αριστερά αντίστοιχα.
- iv) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_2=1,5\text{s}$ .

**142) Ένα κύμα προς τ' αριστερά και η εξίσωσή του.**

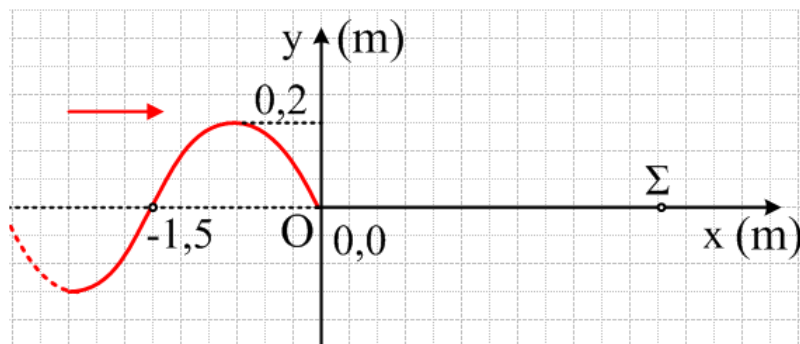
Στο παρακάτω σχήμα βλέπετε τη μορφή ενός αρμονικού κύματος το οποίο διαδίδεται προς τα αριστερά κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, κάποια στιγμή, για την οποία θεωρούμε ότι  $t=0$ . Κάθε σημείο του μέσου χρειάζεται χρόνο  $0,5\text{s}$  για να κινηθεί μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της τροχιάς του.



- i) Με βάση την παραπάνω εικόνα, πόσο είναι το πλάτος και πόσο το μήκος του κύματος;  
.....
- ii) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο για την ταλάντωση που θα πραγματοποιήσει το σημείο O (η προς τα πάνω κατεύθυνση θεωρείται θετική).  
.....
- iii) Με ποια ταχύτητα διαδίδεται το κύμα; .....

**143) Εξίσωση κύματος και στιγμιότυπο.**

Ένα κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και για  $t=0$  φτάνει στο σημείο O, που θεωρούμε  $x=0$ , όπως στο σχήμα. Για να φτάσει το σημείο O σε μέγιστη απομάκρυνση προς τα πάνω, περνά χρόνος  $t'=0,5\text{s}$ .



- i) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο για την ταλάντωση που θα πραγματοποιήσει το σημείο O.  
.....
- ii) Με ποια ταχύτητα διαδίδεται το κύμα;  
.....
- iii) Πόσο χρόνο θα χρειαστεί το κύμα για να φτάσει σε ένα σημείο Σ, που βρίσκεται στη θέση  $x_{\Sigma}=3\text{m}$ ; Γενικότερα πόσο θα καθυστερήσει το κύμα να φτάσει σε ένα τυχαίο σημείο Τ στη θέση  $x$ ; .....

**144) Φύλλο εργασίας. Εισαγωγή στα κύματα.**

- 1) Να συμπληρωθούν τα κενά:



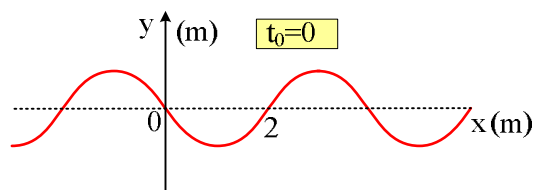
Κατά τη ..... ενός κύματος, μεταφέρεται ενέργεια και ..... από ένα σημείο του μέσου σε άλλο, χωρίς να μεταφέρεται .....

2 ) Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.

- ix) Τα μηχανικά κύματα διαδίδονται μόνο στα στερεά σώματα.
  - x) Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται μόνο σε κάποιο ελαστικό μέσο.
  - xi) Τα διαμήκη κύματα διαδίδονται σε όλα τα ελαστικά μέσα.
  - xii) Η περίοδος ενός αρμονικού κύματος ταυτίζεται με την περίοδο ταλάντωσης της πηγής.
  - xiii) Η περίοδος ενός αρμονικού κύματος είναι το χρονικό διάστημα που η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται.....
- .....

### 145) Ένα κύμα, χωρίς ... τέλος.

Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά (προς την θετική κατεύθυνση) και σε μια στιγμή  $t_0=0$ , πήραμε ένα στιγμιότυπο σε μια περιοχή του μέσου (το κύμα έχει διαδοθεί και πέρα από τη θέση  $x=6\text{m}$ ).



Το σημείο Β στη θέση  $x_1=2\text{m}$  τη στιγμή αυτή έχει ταχύτητα μέτρου  $1,57\text{m/s}$  και φτάνει για πρώτη φορά στη μέγιστη θετική απομάκρυνση τη στιγμή  $t_1=1,5\text{s}$ .

- i) Ποια η ταχύτητα του κύματος;
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- iii) Να σχεδιαστεί το αντίστοιχο στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_2=12,5\text{s}$ .

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)