

Μόνο Στροφική ή σύνθετη κίνηση;

Μια ομογενής ράβδος ΑΓ, στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κάθετο άξονα που διέρχεται από το ένα της άκρο Α.

Τι κίνηση κάνει; Ποιας μορφής Κινητική ενέργεια έχει;

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον

$$\text{της } I = \frac{1}{12} Ml^2$$

Απάντηση:

- 1) Η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μόνο ομαλή στροφική γύρω από τον άξονα με αποτέλεσμα να έχει **μόνο** κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{cm} + M \frac{L^2}{4}) \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} Ml^2 \omega^2 \quad (1)$$

- 2) Η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί σύνθετη. Μια στροφική γύρω από κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Ο, με γωνιακή ταχύτητα ω και μια μεταφορική του κέντρου μάζας Ο, το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση, σαν υλικό σημείο με γραμμική ταχύτητα:

$$v_{\gamma\rho} = v_{cm} = \omega \cdot (AO) \rightarrow v_{cm} = \omega \cdot \frac{l}{2}$$

Έτσι για παράδειγμα το άκρο Α έχει μια ταχύτητα λόγω της μεταφορικής κίνησης την v_{cm} και μια γραμμική ταχύτητα λόγω της περιστροφικής κίνησης $v_{\gamma\rho} = \omega \cdot R = \omega \cdot \frac{l}{2}$. Έτσι η ταχύτητα του άκρου Α είναι μηδε-

νική, πράγμα αναμενόμενο αφού από το άκρο αυτό διέρχεται ο σταθερός άξονας περιστροφής.

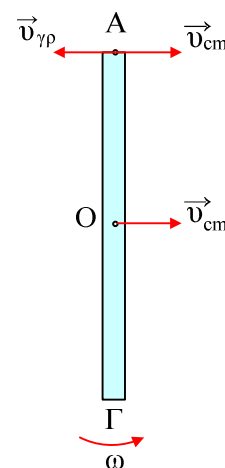
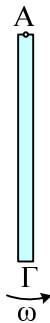
Αν όμως η κίνηση είναι σύνθετη, τότε θα έχει και **μεταφορική** και **περιστροφική** κινητική ενέργεια.

Άρα

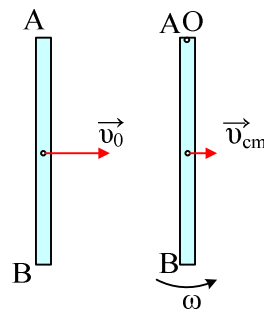
$$\begin{aligned} K_{\text{ολ}} &= K_{\text{μετ}} + K_{\text{περ}} \rightarrow \\ K &= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \rightarrow \\ K &= \frac{1}{2} m \left(\omega \cdot \frac{l}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m l^2 \right) \omega^2 \rightarrow \\ K &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m l^2 \omega^2 \quad (2) \end{aligned}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Αν ένα στερεό στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, ο οποίος δεν περνά από το κέντρο μάζας, τότε το σώμα έχει και μεταφορική κινητική ενέργεια ($K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$) και περιστροφική κινητική ενέργεια ($K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} I \omega^2$) όπου I η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του.

Ας έρθουμε τώρα σε μια εφαρμογή των παραπάνω ιδεών:



Η ράβδος του παρακάτω σχήματος εκτελεί μεταφορική κίνηση με ταχύτητα v_0 πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σημείο O υπάρχει κατακόρυφος σταθερός άξονας. Όταν το άκρο A της ράβδου φτάνει στο O πιάνεται στον άξονα με τη βοήθεια ενός άγκιστρου με αποτέλεσμα η ράβδος να συνεχίσει με περιστροφική κίνηση.



- i) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου, μετά την σταθεροποίηση του άκρου A στο άγκιστρο.
- ii) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης (σαν δύναμης) που ασκήθηκε στην ράβδο από το άγκιστρο.
- iii) Να βρεθεί το έργο της ροπής που ασκήθηκε στη ράβδο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το άκρο της

$$I = \frac{1}{3} Ml^2$$

Λύση:

- i) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της Στροφομής ως προς κάθετο άξονα που περνά από το O και έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\text{πριν}} &= \vec{L}_{\text{μετ}} \rightarrow \\ Mv_0 \frac{l}{2} &= I\omega \rightarrow \\ Mv_0 \frac{l}{2} &= \frac{1}{3} Ml^2 \omega \rightarrow \\ \omega &= \frac{3v_0}{2l} \end{aligned}$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου είναι $v_{cm} = \omega \cdot l/2$.

- ii) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την μεταφορική κίνηση της ράβδου και έχουμε:

$$\begin{aligned} K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρ}} &= W_F \rightarrow \\ W_F &= \frac{1}{2} Mv_{cm}^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2 = -\frac{7}{16} \cdot \frac{1}{2} Mv_0^2 \end{aligned}$$

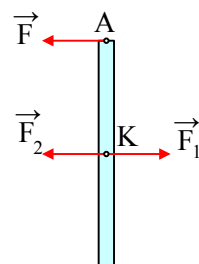
- iii) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την περιστροφική κίνηση της ράβδου και έχουμε:

$$\begin{aligned} K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρ}} &= W_{\tau} \rightarrow \\ W_{\tau} &= \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} Ml^2 \omega^2 \\ W_{\tau} &= \frac{9}{48} \cdot \frac{1}{2} Mv_0^2 \end{aligned}$$

Σχόλιο:

Ποια είναι αυτή η δύναμη και ποια η ροπή που προκαλούν τα παραπάνω αποτελέσματα. Μα προφανώς η δύναμη από το άγκιστρο και η ροπή της. Να θυμηθούμε και ένα ... παλιό κόλπο...

Αν F είναι η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το άγκιστρο για ελάχιστο χρόνο και που μετατρέπει ένα μέρος της μεταφορικής κινητικής ενέργειας σε περιστροφική, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε, ότι στο κέντρο μάζας K, ασκούνται οι δυνάμεις F_1 και F_2 με ίσα μέτρα με την F , όπως στο σχήμα, υπό-



τε F_2 είναι αυτή που μειώνει την μεταφορική κινητική ενέργεια της ράβδου, ενώ η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων $F-F_1$ αυξάνει την περιστροφική κινητική ενέργειά της.

dmargaris@sch.gr