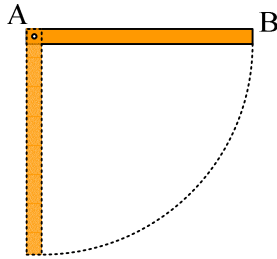
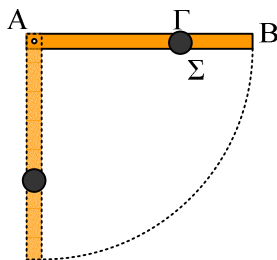


Μέγιστη ταχύτητα και επιτάχυνση.

Μια ομογενής ράβδος AB μήκους L και μάζας m , μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της A. Φέρνουμε τη ράβδο σε οριζόντια θέση και την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί, οπότε η μέγιστη ταχύτητα του άκρου B είναι $v_1=5\text{m/s}$.



Ένα σώμα Σ , ίδιας μάζας m , το οποίο θεωρείται υλικό σημείο, δένεται πάνω στη ράβδο σε σημείο Γ , όπου $(\Gamma B)=L/3$. Φέρνουμε το σύστημα σε τέτοια θέση που η ράβδος να είναι οριζόντια και το αφήνουμε να κινηθεί.



i) Η αρχική επιτάχυνση του σώματος Σ είναι:

α) $a_0 < g$ β) $a_0 = g$ γ) $a_0 > g$

ii) Η μέγιστη ταχύτητα του άκρου B της ράβδου είναι:

α) $v_2 < 5\text{m/s}$ β) $v_2 = 5\text{m/s}$ γ) $v_2 > 5\text{m/s}$

iii) Αν δένουμε το σώμα Σ στο άκρο B, τότε η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτούσε, θα ήταν:

α) $v_3 < 5\text{m/s}$ β) $v_3 = 5\text{m/s}$ γ) $v_3 > 5\text{m/s}$

Δίνεται η ροπή αδράνεια της ράβδου ως προς κάθετο σε αυτήν άξονα που περνά από το μέσον της $I = mL^2/12$.

Απάντηση:

- i) Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα στην οριζόντια θέση τη στιγμή που αφήνεται να κινηθεί, όπου \vec{F} η δύναμη από τον άξονα. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Και θεωρώντας τις δεξιόστροφες ροπές θετικές παίρνουμε:

$$w \cdot \frac{L}{2} + w \frac{2L}{3} = \left(\frac{1}{12} mL^2 + m \frac{L^2}{4} + m \frac{4L^2}{9} \right) \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2L} \rightarrow$$

$$\alpha_{\Sigma} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot 2L/3 = g$$

Σωστή η β) πρόταση.

- ii) Η ράβδος επιταχύνεται μέχρι να γίνει κατακόρυφη, ενώ μετά επιβραδύνεται και έτσι στην κατακόρυφη θέση η ράβδος έχει την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα και κατά συνέπεια το άκρο B θα έχει μέγιστη ταχύτητα. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ, (αφού η μόνη δύναμη που παράγει

έργο είναι το βάρος της ράβδου, η οποία είναι συντηρητική δύναμη) για την πτώση της ράβδου από την αρχική θέση μέχρι την κατακόρυφη θέση. Ορίζοντας σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το μέσον της ράβδου, όταν βρίσκεται στην κατακόρυφο έχουμε:

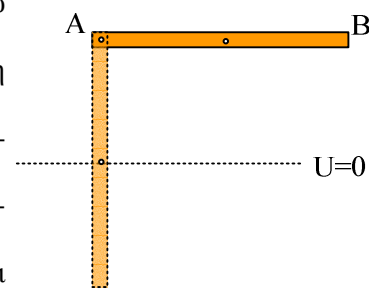
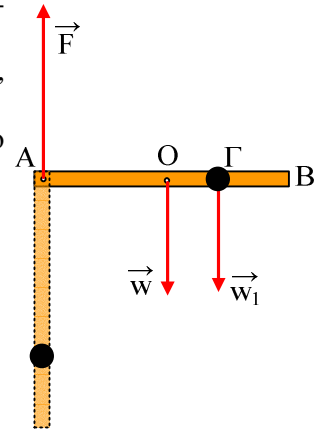
$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow$$

$$mgL/2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow$$

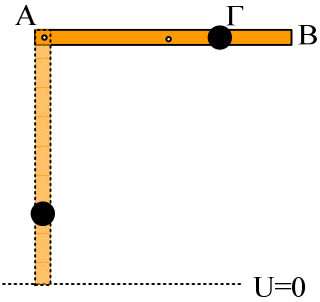
$$mgL/2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} mL^2 \omega^2 \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \rightarrow$$

$$v_B = \omega \cdot L = \sqrt{3gL} \quad (1)$$



Εφαρμόζουμε τώρα την ΑΔΜΕ για την πτώση του συστήματος ράβδος-σώμα Σ από την αρχική θέση μέχρι η ράβδος να γίνει κατακόρυφη αφού μέχρι εκεί επιταχύνεται, ενώ μετά επιβραδύνεται και έτσι στην κατακόρυφη θέση το σύστημα έχει την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα και κατά συνέπεια το άκρο Β θα έχει μέγιστη ταχύτητα.



Ορίζοντας σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κάτω άκρο Β της ράβδου, όταν βρίσκεται στην κατακόρυφο έχουμε:

$$K_{αφ} + U_{αφ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$mgL + mgL = mgL/2 + mgL/3 + \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow$$

$$\frac{7}{6} mgL = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} mL^2 + m \frac{4L^2}{9} \right) \omega^2 \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$v_B = \omega \cdot L = \sqrt{3gL} \quad (2)$$

Σωστή πρόταση η β), δηλαδή η ταχύτητα του άκρου Β είναι η ίδια όπως και πριν.

iii) Εφαρμόζουμε ξανά την ΑΔΜΕ για την πτώση του συστήματος ράβδος-σώμα Σ από την αρχική θέση μέχρι η ράβδος να γίνει κατακόρυφη.

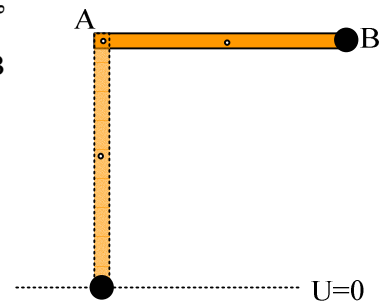
Ορίζοντας σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κάτω άκρο Β της ράβδου, όταν βρίσκεται στην κατακόρυφο έχουμε:

$$K_{αφ} + U_{αφ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$mgL + mgL = mgL/2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow$$

$$\frac{3}{2} mgL = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} mL^2 + mL^2 \right) \omega_2^2 \rightarrow$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{9g}{4L}} \rightarrow$$



$$v_{B2} = \omega_2 \cdot L = \sqrt{\frac{9}{4} gL} \quad (3)$$

Από (2) και (3) βλέπουμε ότι η ταχύτητα του Σ και του άκρου Β είναι τώρα μικρότερη από πριν, δηλαδή όταν η σημειακή μάζα πλησιάζει το άκρο Β, αυξάνεται η ροπή αδράνειας και μειώνεται η ταχύτητα του σώματος Σ.

dmargaris@sch.gr