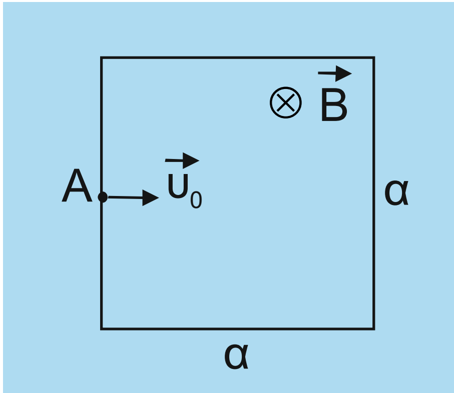
Η κίνηση του σωματιδίου στο κουτί



Το διπλανό σχήμα παριστάνει την τομή ενός ακλόνητου κουτιού πλευράς α με ελαστικά και μονωτικά τοιχώματα. Ένα θετικά φορτισμένο σφαιρίδιο μάζας m και φορτίου q εισέρχεται στο κουτί από την οπή Α, μέσο μιας πλευράς του κουτιού, με οριζόντια ταχύτητα, στο επίπεδο της βάσης του κουτιού και κάθετη στην πλευρά εισόδου, μέτρου $\upsilon_0 = \dfrac{B \cdot q \cdot \alpha}{4 \cdot m}$, όπου B το μέτρο της έντασης ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου που επικρατεί μέσα στο κουτί (σχήμα σε κάτοψη). Αν το σφαιρίδιο συγκρουστεί με τα τοιχώματα του κουτιού, οι κρούσεις θεωρούνται ελαστικές ασήμαντης διάρκειας και οι τριβές θεωρούνται αμελητέες. Δίνονται τα m, q, α, B.

Α. Να υπολογίσετε την ακτίνα και την περίοδο της ομαλής κυκλικής κίνησης, που θα αρχίσει να εκτελεί το σφαιρίδιο κατά την είσοδό του στο κουτί

Β. Πού θα έπρεπε να ανοίξουμε δεύτερη οπή, ώστε το σφαιρίδιο να βγει από το κουτί στον ελάχιστο δυνατό χρόνο; Πόσος είναι ο χρόνος αυτός;

Αν η μοναδική οπή στο κουτί είναι η οπή Α:

Γ. Να εξετάσετε αν το σφαιρίδιο θα βγει από το κουτί

Δ. Να υπολογίσετε το χρόνο κίνησης του σφαιριδίου μέσα στο κουτί

Ε. Τι θα συνέβαινε αν το σφαιρίδιο εισερχόταν στο κουτί με ταχύτητα μέτρου $\upsilon'_0 = \dfrac{B \cdot q \cdot \alpha}{8 \cdot m}$

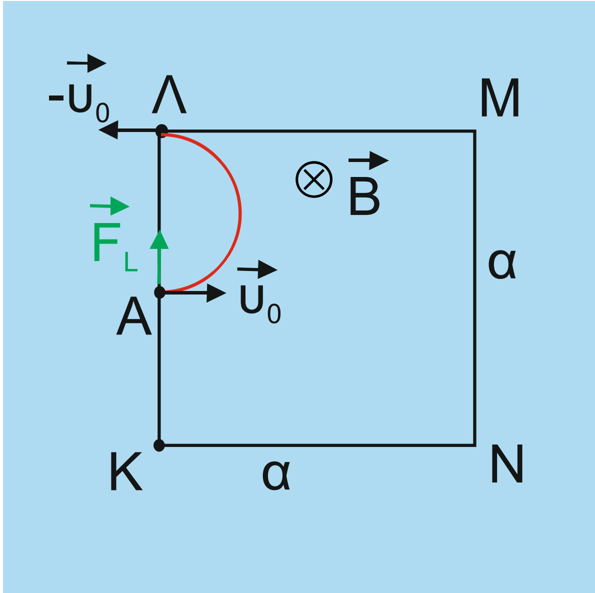
Απάντηση

Α. Η ακτίνα του κύκλου που θα διαγράψει το σφαιρίδιο μέσα στο κουτί είναι ίση με

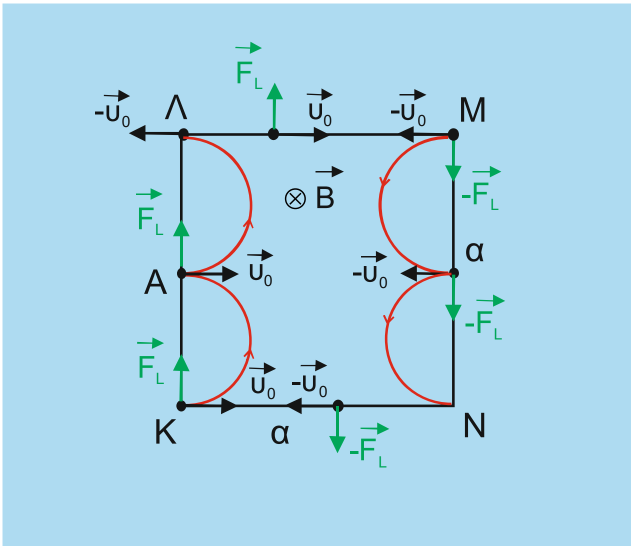
$$R = \frac{m \cdot \upsilon_0}{q \cdot B} \rightarrow R = \frac{m \cdot \dfrac{B \cdot q \cdot \alpha}{4 \cdot m}}{q \cdot B} \rightarrow R = \frac{\alpha}{4}$$

και η περίοδος της κυκλικής κίνησης που θα αρχίσει να εκτελεί είναι

$$T = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B}$$



Β. Το σφαιρίδιο διαγράφει, λόγω της δύναμης Lorentz, οριζόντιο ημικύκλιο ακτίνας $R = \frac{α}{4}$, άρα διαμέτρου $\frac{α}{2}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Εφόσον η οπή Α βρίσκεται στο μέσον της ΚΛ, το αντιδιαμετρικό σημείο του Α θα είναι το σημείο Λ. Επομένως η δεύτερη οπή θα πρέπει να ανοιχτεί στην κορυφή Λ και στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με την οπή Α ώστε το σφαιρίδιο να βγει από το κουτί στον ελάχιστο δυνατό χρόνο, ο οποίος θα ισούται με $Δt = \frac{T}{2} \rightarrow Δt = \frac{π \cdot m}{q \cdot B}$



Γ. Το σφαιρίδιο συγκρουόμενο ελαστικά με την ΚΛ και κάθετα σε αυτήν στο σημείο Λ με ταχύτητα $-\vec{υ}_0$, θα ανακλαστεί με ταχύτητα $\vec{υ}_0$, οπότε θα δεχτεί δύναμη Lorentz, κάθετη στην ΜΛ και μόνιμα κάθετη στην ταχύτητά του, προς το εξωτερικό του κουτιού, με αποτέλεσμα να κινηθεί ομαλά μέχρι το σημείο Μ. Εκεί λόγω της ελαστικής του κρούσης, θα ανακλαστεί με ταχύτητα $-\vec{υ}_0$ και δεχόμενο δύναμη Lorentz, θα διαγράψει ημικύκλιο ακτίνας $R = \frac{α}{4}$, προσπίπτοντας ελαστικά στο μέσο της ΜΝ με ταχύτητα $\vec{υ}_0$, οπότε και θα ανακλαστεί με ταχύτητα $-\vec{υ}_0$, διαγράφοντας ακόμη ένα ημικύκλιο ίδιας ακτίνας. Το σφαιρίδιο προσπίπτει στο σημείο Ν, αντιστρέφοντας και πάλι την ταχύτητά του και στη συνέχεια δέχεται δύναμη Lorentz, κάθετη στην ΝΚ και μόνιμα κάθετη στην ταχύτητά του, προς το εξωτερικό του κουτιού, με αποτέλεσμα να κινηθεί ομαλά μέχρι το σημείο Κ. Εκεί λόγω της ελαστικής του κρούσης, θα ανακλαστεί με ταχύτητα $\vec{υ}_0$ και δεχόμενο δύναμη Lorentz, θα διαγράψει ημικύκλιο ακτίνας $R = \frac{α}{4}$, οπότε και θα βγει από την οπή Α.

Δ. Το σφαιρίδιο κατά την κίνησή του στο κουτί διέγραψε ομαλά τέσσερα ημικύκλια σε χρόνο $\Delta t_1 = 2T \rightarrow \Delta t_1 = \dfrac{4\pi \cdot m}{q \cdot B}$ και τις πλευρές ΛΜ και ΝΚ σε χρόνο $\Delta t_2 = \dfrac{2\alpha}{\upsilon_0}$.

Επομένως ο συνολικός χρόνος κίνησής του στο κουτί ήταν

$$\Delta t_{o\lambda} = \Delta t_1 + \Delta t_2 \rightarrow \Delta t_{o\lambda} = \frac{4\pi \cdot m}{q \cdot B} + \frac{2\alpha}{\upsilon_0} \rightarrow \Delta t_{o\lambda} = \frac{4\pi \cdot m}{q \cdot B} + \frac{2\alpha}{\dfrac{B \cdot q \cdot \alpha}{4 \cdot m}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta t_{o\lambda} = \frac{4\pi \cdot m}{q \cdot B} + \frac{8 \cdot m}{q \cdot B}$$

Παρατήρηση: Αν αμέσως μετά την είσοδο του σφαιριδίου στο κουτί κλείναμε την οπή Α, το σφαιρίδιο θα εκτελούσε περιοδική κίνηση με περίοδο ίση με το $\Delta t_{o\lambda}$, που υπολογίσαμε παραπάνω.

Ε. Η ακτίνα του κύκλου που θα διαγράψει το σφαιρίδιο μέσα στο κουτί θα είναι τώρα ίση με

$$R' = \frac{m \cdot \upsilon'_0}{q \cdot B} \rightarrow R' = \frac{m \cdot \dfrac{B \cdot q \cdot \alpha}{8 \cdot m}}{q \cdot B} \rightarrow R' = \frac{\alpha}{8}$$

ενώ η περίοδος κίνησής του θα είναι ίδια, αφού δεν εξαρτάται από την ταχύτητά του. Με παρόμοιους συλλογισμούς με αυτούς του ερωτήματος (Γ), το σφαιρίδιο θα φτάσει στο Λ, έχοντας διαγράψει δύο ημικύκλια, στη συνέχεια θα κινηθεί ομαλά μέχρι το Μ, στη συνέχεια ανακλώμενο θα φτάσει στο Ν, έχοντας διαγράψει τέσσερα ημικύκλια, στη συνέχεια θα κινηθεί ομαλά μέχρι το Κ, όπου μετά την ανάκλασή του θα διαγράψει δύο ακόμη ημικύκλια και θα βγει από την οπή Α. Ο συνολικός χρόνος κίνησής του θα είναι τώρα

$$\Delta t'_{o\lambda} = 4T + \frac{2\alpha}{\upsilon'_0} \rightarrow \Delta t'_{o\lambda} = \frac{8\pi \cdot m}{q \cdot B} + \frac{2\alpha}{\dfrac{B \cdot q \cdot \alpha}{8 \cdot m}} \rightarrow \Delta t'_{o\lambda} = \frac{8\pi \cdot m}{q \cdot B} + \frac{16 \cdot m}{q \cdot B}$$

Παπάζογλου Αποστόλης