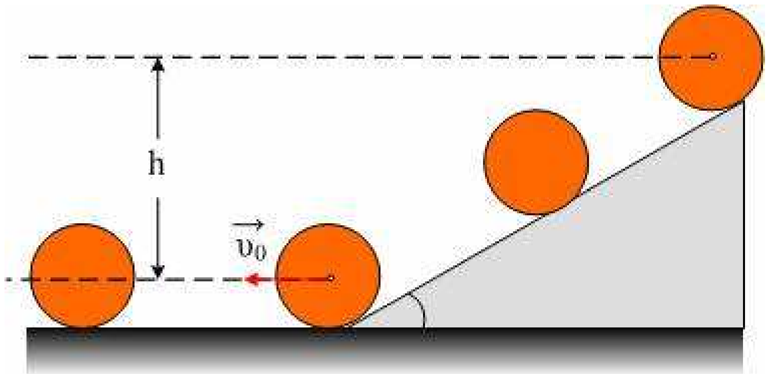
Κύλιση- ολίσθηση και έργο τριβής.

Ένας κύλινδρος μάζας m=40kg και ακτίνας R=0,5m αφήνεται στην κορυφή ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου από ύψος h=45m.



i) Ποια η ταχύτητα υ_0 του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν φτάσει στη βάση του επιπέδου;

ii) Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κυλίνδρου και οριζοντίου επιπέδου είναι μ=0,1, ζητούνται:

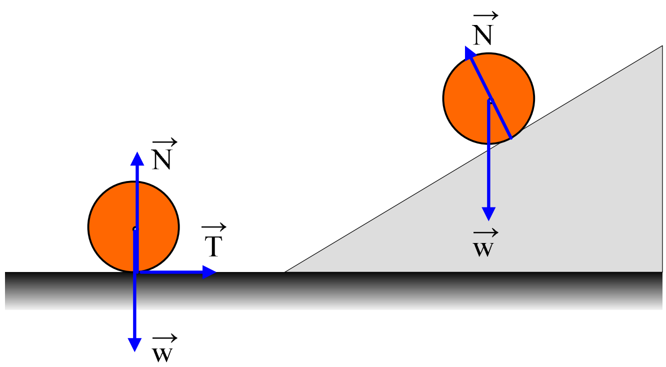
α) Η τελική ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

β) Η τελική γωνιακή του ταχύτητα.

γ) Το έργο της τριβής (σαν δύναμης), το έργο της ροπής της τριβής, καθώς και την θερμότητα που παράγεται εξαιτίας της τριβής.

Απάντηση:

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο φαίνονται στο σχήμα. Στο κεκλιμένο επίπεδο δεν έχουμε τριβή, άρα δεν ασκείται καμιά ροπή στον κύλινδρο ο οποίος ολισθαίνει προς τα κάτω χωρίς να περιστρέφεται, εκτελώντας μόνο μεταφορική κίνηση.



i) Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ανάμεσα στην αρχική θέση και στην βάση του επιπέδου, θεωρώντας σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο Ο του κυλίνδρου, έχουμε:

$$K_1+U_1 = K_2 + U_2$$

$$mgh= ½\, m\upsilon_0^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_0^2 = 2gh = 900m^2/s^2$$

$$\upsilon_0 = 30m/s$$

ii) Στο οριζόντιο επίπεδο ασκείται στον κύλινδρο τριβή ολίσθησης μέτρου:

$$T = \mu N = \mu mg = 40N$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την μεταφορική και για την στροφική κίνηση του κυλίνδρου παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \text{ από όπου:}$$

$$\alpha_{cm} = 1m/s^2$$

με φορά προς τα αριστερά.

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

$$TR = ½\, mR^2\, \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 2T/mR = 4rad/s^2.$$

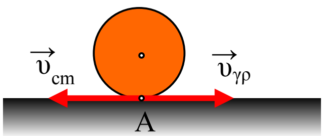
Ο κύλινδρος εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση για την οποία:

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_0 - \alpha_{cm}t \ (1) \text{ και } x = \upsilon_0 t - ½\, \alpha_{cm}t^2 \ (2)$$

και στροφική ομαλά επιταχυνόμενη με εξισώσεις:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu}t \ (3) \text{ και } \theta = ½\, \alpha_{\gamma\omega\nu}t^2 \ (4)$$

Μέχρι πότε θα συμβαίνει αυτό; Μέχρι την στιγμή που ένα σημείο Α επαφής του κυλίνδρου, με το έδαφος να αποκτήσει μηδενική ταχύτητα. Δηλαδή μέχρι τη στιγμή που $\upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho}$, όπως στο σχήμα.



Με την βοήθεια των (1) και (3) θα έχουμε:

$$\upsilon_0 - \alpha_{cm}t = (\alpha_{\gamma\omega\nu}t)\cdot R \text{ από όπου}$$

$$t = \upsilon_0/(\alpha_{cm} + \alpha_{\gamma\omega\nu}R) = 10s$$

$$\text{Άρα } \upsilon_{cm} = \upsilon_0 - \alpha_{cm}t = 30m/s - 1\cdot 10m/s = 20m/s$$

$$\text{και } \omega = \alpha_{\gamma\omega\nu}t = 40rad/s.$$

Από τις εξισώσεις (2) και (4) βρίσκουμε:

$$x = \upsilon_0 t - ½\, \alpha_{cm}t^2 = 30\cdot 10m - ½\, 1\cdot 100m = 250m$$

$$\theta = ½\, 4\cdot 100rad = 200rad.$$

Άρα για τα έργα έχουμε:

$$W_T = -Tx = -\,40\cdot 250J = -10000J$$

$$W_\tau = +\,\tau\cdot\theta = TR\theta = 40\cdot ½\cdot 200J = 4000J.$$

Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η τριβή αφαιρεί μεταφορική κινητική ενέργεια 10.000J από τον κύλινδρο, από τα οποία τα 4000J τα μετατρέπει σε περιστροφική κινητική ε-νέργεια. Τα υπόλοιπα; Τα υπόλοιπα 6000J μετατρέπονται σε θερμότητα.

Σχόλιο:

Κατά την περιστροφή του κυλίνδρου ήρθαν σε επαφή με το έδαφος τα σημεία της περιφέρειάς του μήκους $\Delta s=\theta\cdot R= 200\cdot ½\ m = 100m$, συνεπώς ο κύλινδρος γλίστρησε κατά:

$$x_1= x-\Delta s= 250m-100m = 150m$$

Εξαιτίας αυτής της ολίσθησης παράγεται θερμότητα:

$$Q= |T\cdot x_1| = 40\cdot 150J= 6000J.$$

dmargaris@sch.gr