

Διονύσης Μάργαρης

Φυσική

Γ' Λυκείου

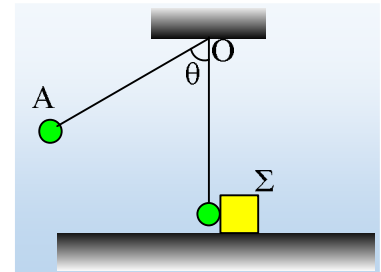


Κρούσεις

Ασκήσεις 2022-23

1) Τα πριν και τα μετά μιας ελαστικής κρούσης

Μια μικρή σφαίρα μάζας m κρέμεται στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου αβαρούς και μη εκτατού νήματος, μήκους $l=1,6\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου δένεται σε σταθερό σημείο O . Η σφαίρα εφάπτεται σε σώμα Σ μάζας $M=2,4\text{kg}$, το οποίο βρίσκεται ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,5$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εκτρέπουμε το νήμα κατά γωνία θ , φέρνοντας τη σφαίρα στη θέση A , από όπου την αφήνουμε να κινηθεί. Η σφαίρα φτάνοντας στην αρχική θέση ισορροπίας της συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ , το οποίο μετά την κρούση διανύει απόσταση $s=0,4\text{m}$ στο οριζόντιο επίπεδο και σταματά.

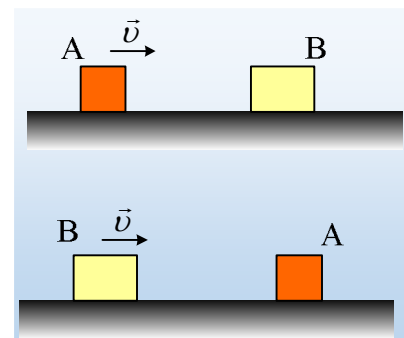


- i) Να βρεθεί η ταχύτητα που απέκτησε το σώμα Σ , αμέσως μετά την κρούση.
- ii) Ποια η μεταβολή της ορμής και της κινητικής ενέργειας της σφαίρας, που οφείλονται στην κρούση.
- iii) Αν η σφαίρα έχει μάζα $m=0,8\text{kg}$, να υπολογιστούν:
 - α) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της σφαίρας και του σώματος Σ , αμέσως μετά την κρούση.
 - β) Η αρχική επιτάχυνση της σφαίρας στη θέση A , μόλις αφήθηκε να κινηθεί.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, ενώ θεωρούνται γνωστοί οι τριγωνομετρικοί αριθμοί (υπάρχουν και κομπιουτεράκια!)

2) Αλλάζοντας ρόλους στην κρούση.

Δυο σώματα A και B με μάζες m_1 και $m_2=2m_1$ αντίστοιχα, βρίσκονται ακίνητα σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης. Αν εκτοξεύσουμε το σώμα A ώστε να συγκρουσθεί κεντρικά και ελαστικά με το B , έχοντας ταχύτητα u_0 τη στιγμή που αρχίζει η κρούση, τότε το B διανύει απόσταση d_2 , μέχρι να σταματήσει. Αν αντιστρέψουμε τους ρόλους και τώρα εκτοξεύσουμε το B , ώστε να κτυπήσει το ακίνητο A , έχοντας τη στιγμή που αρχίζει η κρούση ταχύτητα u_0 , ενώ ακολουθήσει κεντρική ελαστική κρούση, τότε το σώμα A διανύει απόσταση d_1 , μέχρι να σταματήσει, μετά την κρούση. Οι αποστάσεις d_1 και d_2 συνδέονται με την σχέση:



$$\alpha) d_1=d_2, \quad \beta) d_1=2d_2, \quad \gamma) d_1=4d_2, \quad \delta) d_1= \frac{1}{2} d_2.$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

3) Μια μπάλα πέφτει σε κατακόρυφο τοίχο

Μια μπάλα μάζας $m=0,4\text{kg}$ κινείται χωρίς να περιστρέφεται, στο λείο δάπεδο ενός δωματίου και πέφτει κάθετα

στον τοίχο με ταχύτητα $v=4\text{m/s}$, οπότε ακολουθεί ελαστική κρούση.

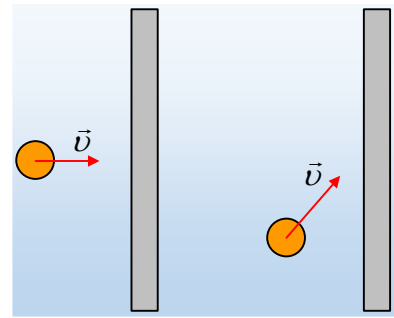
i) Να υπολογισθεί η μεταβολή της ορμής της μπάλας που οφείλεται στην κρούση καθώς και η μέγιστη δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης στη διάρκεια της κρούσης.

ii) Αν η μπάλα κτυπήσει πλάγια τον τοίχο, με ταχύτητα ίδιου μέτρου η διεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία 30° με τον τοίχο:

α) Ποια η ελάχιστη κινητική ενέργεια της μπάλας στη διάρκεια της κρούσης;

β) Θεωρώντας ότι η διάρκεια της κρούσης είναι ίδια στις δύο παραπάνω κρούσεις και η μέση δύναμη που ασκεί ο τοίχος στην μπάλα στην πρώτη περίπτωση έχει μέτρο $F_1=20\text{N}$, πόσο είναι το μέτρο της μέσης δύναμης που θα δεχτεί η μπάλα από τον τοίχο, στην δεύτερη περίπτωση;

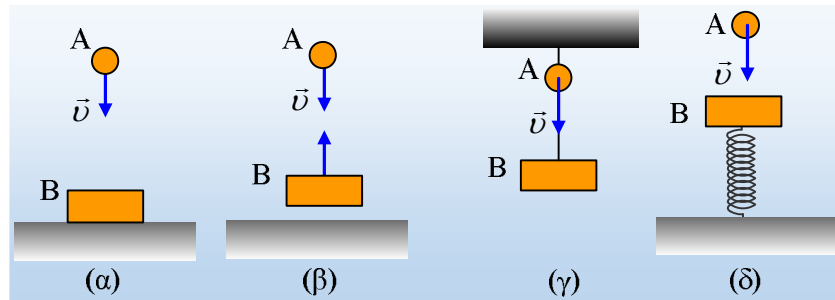
Δίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας των 30° .



Ασκήσεις 2021-22

4) Κρούσεις και διατήρηση ορμής

Μια σφαίρα A πέφτει κατακόρυφα και συγκρούεται ελαστικά με πλάκα A. Στο σχήμα βλέπετε τέσσερις εκδοχές, όπου στο (α) η πλάκα ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, στο (β) κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω, στο (γ) ηρεμεί στο κάτω άκρο μη εκτατού νήματος και στο (δ) ταλαντώνεται στο πάνω άκρο ιδανικού ελατηρίου.



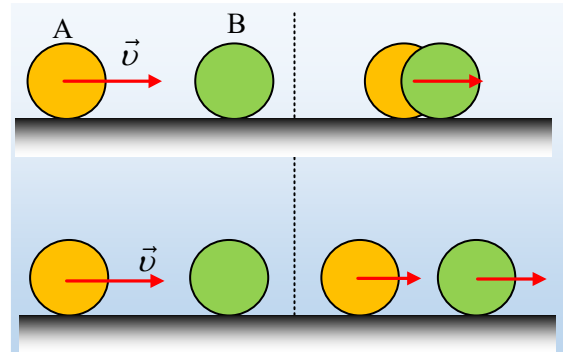
Συνήθως αναφέρεται ότι «σε κάθε κρούση η ορμή παραμένει σταθερή».

- i) Η παραπάνω διατύπωση είναι σωστή ή ελλιπής;
- ii) Να εξετάσετε σε ποιες από τις περιπτώσεις η ορμή του συστήματος σφαίρα-πλάκα, διατηρείται κατά την κρούση, δίνοντας και σύντομες δικαιολογήσεις.

5) Κρούση και ποσοστό απώλειας ενέργειας

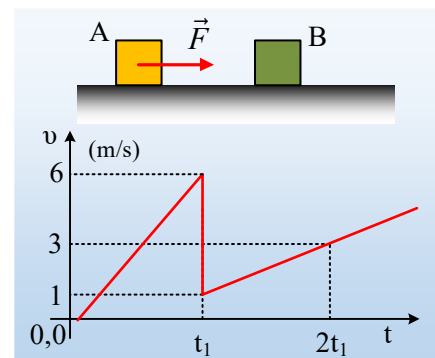
Ένα σώμα A μάζας $m_1=1\text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και κάποια στιγμή συγκρούεται κεντρικά με ακίνητο σώμα B. Αν κατά την κρούση το σώμα A χάσει το 75% της κινητικής του ενέργειας, να υπολογιστεί η μάζα του σώματος B, όταν:

- i) Η κρούση είναι πλαστική.
- ii) Η κρούση είναι ελαστική.



6) Δύο κρούσεις και δύο διαγράμματα

Ένα σώμα A κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης F και την στιγμή t_1 συγκρούεται μετωπικά με δεύτερο σώμα B. Στο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας του A σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο. Η κρούση έχει αμελητέα διάρκεια, ενώ η δύναμη F συνεχίζει να ασκείται στο σώμα και μετά την κρούση.

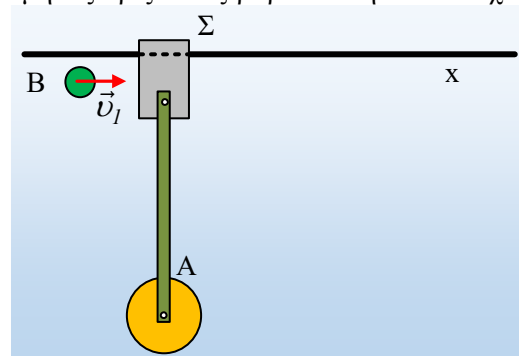


- i) Να αποδείξετε ότι η κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι πλαστική.
- ii) Να συγκρίνετε τις μάζες των δύο σωμάτων A και B.

iii) Να εξετάσετε αν πριν την κρούση, το σώμα B, είναι ακίνητο ή αν κινείται.

7) Τρεις αρθρώσεις, η μία με τριβή.

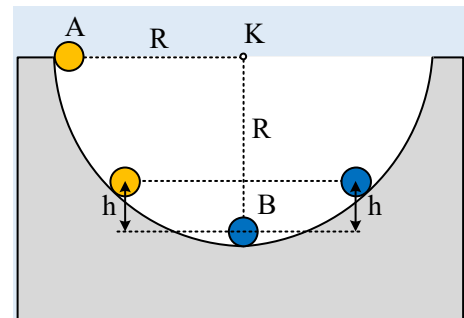
Το σώμα Σ, μάζας $m=1\text{kg}$ μπορεί να κινείται χωρίς τριβές, κατά μήκος οριζόντιας ράβδου στην οποία έχει αρθρωθεί. Μια αβαρής ράβδος έχει αρθρωθεί στο σώμα Σ και στο κάτω άκρο της, έχει επίσης αρθρωθεί μια σφαίρα A, μάζας $M=5\text{kg}$. Η ράβδος ηρεμεί στην κατακόρυφη θέση, ενώ δίνεται ότι η άρθρωση της σφαίρας δεν εμφανίζει τριβές, ενώ αντίθετα η άρθρωση μεταξύ του σώματος Σ και της αβαρούς ράβδου παρουσιάζει τριβές. Κάποια στιγμή μια δεύτερη σφαίρα B μάζας $m_1=0,5\text{kg}$ η οποία κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_1=4,5\text{m/s}$, όπως στο σχήμα, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ. Ζητούνται:



- Η ταχύτητα του σώματος Σ, αμέσως μετά την κρούση.
- Η ταχύτητα του σώματος Σ, μόλις σταματήσει η ταλάντωση της σφαίρας A, εξαιτίας της τριβής που θα αναπτυχθεί στην άρθρωση μεταξύ του Σ και της αβαρούς ράβδου.
- Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας, εξαιτίας της τριβής που αναπτύσσεται στην άρθρωση.

8) Μια κρούση στο βάθος ενός ημισφαιρίου

Από το άκρο ενός λείου ημισφαιρίου κέντρου K και ακτίνας $R=1,25\text{m}$, αφήνεται μια μικρή σφαίρα A, μάζας $m=0,1\text{kg}$ και αμελητέων διαστάσεων, να κινηθεί. Η σφαίρα φτάνοντας στο κατώτερο σημείο του ημισφαιρίου, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα B, ίδιας ακτίνας. Μετά την κρούση οι δυο σφαίρες φτάνουν στο ίδιο h , πριν κινηθούν ξανά προς τα κάτω.



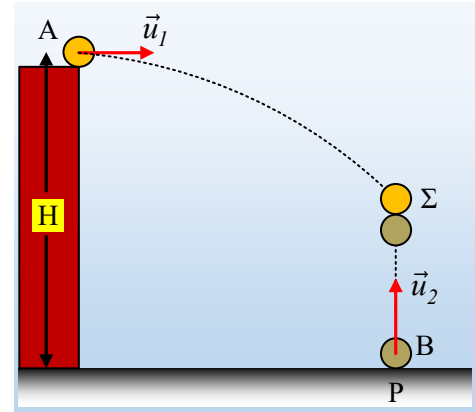
Αν $g=10\text{m/s}^2$ ζητούνται:

- Ποια σφαίρα αποκτά μεγαλύτερη, κατά μέτρο, ταχύτητα μετά την κρούση;
- Να βρεθεί η μάζα M της B σφαίρας.
- Να υπολογιστεί το ύψος h .
- Αν οι δύο σφαίρες συγκρούονται ξανά για δεύτερη φορά στο χαμηλότερο σημείο του ημισφαιρίου, να βρεθεί το ύψος h_1 στο οποίο θα φτάσει η σφαίρα A, μετά την κρούση.

9) Μια πλάγια ελαστική κρούση στον αέρα.

Μια μικρή σφαίρα A μάζας $m_1=0,3\text{kg}$, εκτοξεύεται τη στιγμή $t_0=0$ οριζόντια, με αρχική ταχύτητα μέτρου $u_1=10\text{m/s}$, από ύψος $H=8,75\text{m}$, όπως στο σχήμα. Μετά από λίγο, μια δεύτερη σφαίρα μάζας $m_2=0,2\text{kg}$, εκτοξεύεται από το σημείο P του εδάφους, κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα μέτρου $u_2=10\text{m/s}$. Τη χρονική στιγμή

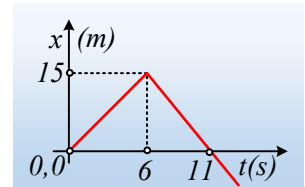
$t_1 = 1s$, καθώς ανεβαίνει η B σφαίρα, συναντά την A με την οποία συγκρούεται ελαστικά στον αέρα, στο σημείο Σ.



- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα της B σφαίρας, ελάχιστα πριν την κρούση.
 - ii) Αν η κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών διαρκεί απειροελάχιστα, να υπολογιστούν οι ταχύτητες των σφαιρών ελάχιστα μετά την κρούση.
 - iii) Να βρεθεί η μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας που οφείλεται στην κρούση.
 - iv) Ποια η τελική κινητική ενέργεια με την οποία η A σφαίρα φτάνει στο έδαφος;
- Δίνεται $g = 10m/s^2$.

10) Ψάχνοντας να βρούμε το είδος της κρούσης

Μια σφαίρα A μάζας $m_1 = 2kg$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, κατά μήκος μιας ευθείας (ε) και την στιγμή $t_1 = 6s$ συγκρούεται με δεύτερη σφαίρα B ίδιας ακτίνας, συνεχίζοντας να κινείται στην ίδια ευθεία (ε). Λαμβάνοντας το σημείο O στο οποίο βρίσκεται η σφαίρα τη στιγμή $t = 0$, ως αρχή ενός προσανατολισμένου άξονα $x'x$, με θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση, σχεδιάσαμε τη γραφική παράσταση θέσης χρόνου, παίρνοντας το διπλανό διάγραμμα.

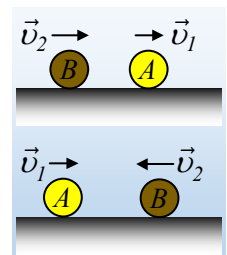


- i) Αν μετά την κρούση η B σφαίρα κινείται στην ίδια ευθεία (ε), η κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών είναι ή όχι κεντρική;
- ii) Να υπολογίσετε την ορμή της σφαίρας A, πριν και μετά την κρούση, καθώς και την μεταβολή της ορμής της που οφείλεται στην κρούση.
- iii) Να αποδείξετε ότι η σφαίρα B πριν την κρούση κινείται.

iv) Αν η σφαίρα B έχει μάζα $m_2 = 3kg$ και πριν την κρούση έχει ταχύτητα μέτρου $|v_2| = 3m/s$:

α) Ποιο από τα διπλανά σχήματα, δείχνει τις θέσεις και τις ταχύτητες των σφαιρών, ελάχιστα πριν την κρούση; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της B σφαίρας μετά την κρούση.

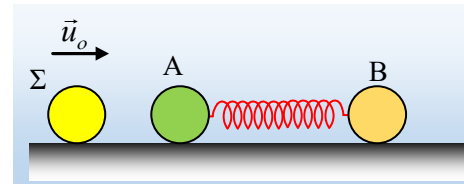


v) Αφού υπολογίσετε την μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε σφαίρας, λόγω κρούσης, να αποδείξετε ότι η παραπάνω κρούση είναι ανελαστική.

11) Μια ελαστική κρούση και μια «κρούση» διαρκείας

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σφαίρες A και B, της ίδιας (μικρής) ακτίνας R με μάζες $m_1 = 2kg$ και $m_2 = 6kg$ αντίστοιχα, δεμένες στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 50N/m$ και φυσικού μήκους $l_0 = 1m$. Μια τρίτη σφαίρα Σ, ίδιας ακτίνας R και μάζας $m = 1kg$, κινείται οριζόντια κατά μήκος του άξονα του

ελατηρίου με ταχύτητα $u_0=6\text{m/s}$ (χωρίς να περιστρέφεται) και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την σφαίρα A.

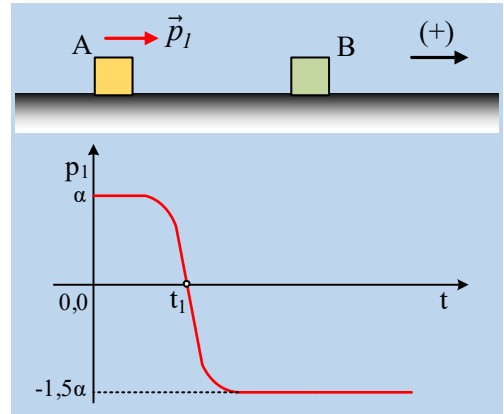


- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα την οποία αποκτά η A σφαίρα μετά την κρούση, η οποία θεωρείται ακαριαία (αμελητέας διάρκειας, οπότε η σφαίρα «δεν προλαβαίνει» να μεταβάλλει το μήκος του ελατηρίου).
- ii) Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σφαιρών A και B, για την κίνησή τους μετά την παραπάνω κρούση.
- iii) Ποια η μέγιστη στιγμιαία ταχύτητα την οποία πρόκειται να αποκτήσει η B σφαίρα;
- iv) Κάποια στιγμή t_1 βλέπουμε την σφαίρα A να έχει ταχύτητα μέτρου $v_1=1\text{m/s}$ με κατεύθυνση προς τα αριστερά. Για τη στιγμή αυτή να υπολογιστούν:
 - α) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.
 - β) ο ρυθμός μεταβολής της ορμής και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της A σφαίρας.

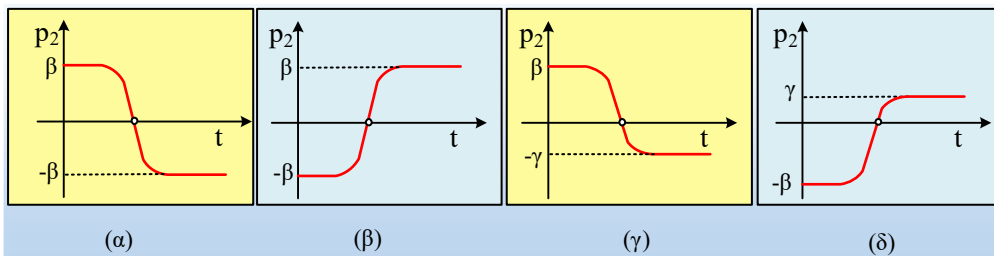
Ασκήσεις 2020-21

12) Μια κεντρική ελαστική κρούση και ένα διάγραμμα

Ένα σώμα Α που κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά κάποια στιγμή με ένα δεύτερο σώμα Β. Στο σχήμα δίνεται το διάγραμμα της ορμής του σώματος Α σε συνάρτηση με το χρόνο.

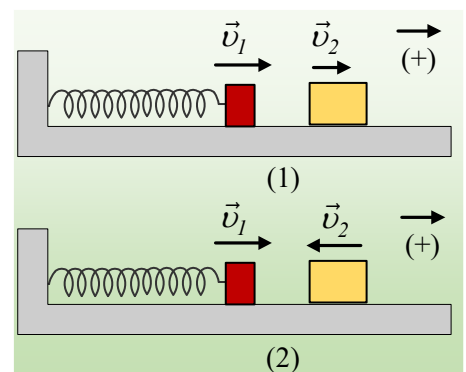


- i) Να εξηγήσετε γιατί το σώμα Β πριν την κρούση κινείται και να βρείτε την φορά της κίνησής του.
- ii) Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα, τα οποία εμφανίζουν την μεταβολή της ορμής του Β σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, μπορεί να είναι σωστό;



13) Πλαστική κρούση στη διάρκεια μιας αατ

Ένα σώμα Α μάζας $m_1=1\text{kg}$ εκτελεί αατ δεμένο στο άκρο ενός οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, με εξίσωση $x=0,5\cdot\eta\mu(20t)$ (S.I.), πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή και ενώ απέχει απόσταση $d=0,3\text{m}$ από την θέση ισορροπίας, συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ένα δεύτερο σώμα Β μάζας $m_2=3\text{kg}$, με αποτέλεσμα η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου να παίρνει τιμή $U_{\max}=68\text{J}$. Ζητούνται:

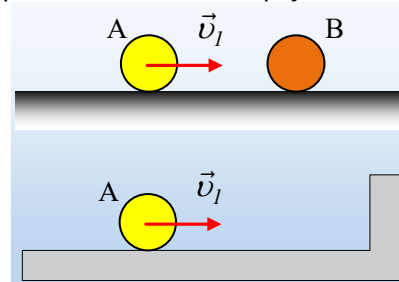


- i) Να υπολογισθεί το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Α, ελάχιστα πριν την κρούση.
- ii) Η κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος, ελάχιστα μετά την κρούση.
- iii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής κάθε σώματος, η οποία οφείλεται στην κρούση, αν οι ταχύτητες των δύο σωμάτων ελάχιστα πριν την κρούση:
 - α) έχουν την ίδια κατεύθυνση, όπως στο σχήμα (1).

β) έχουν αντίθετες κατευθύνσεις, όπως στο σχήμα (2).

14) Έργα και ενέργειες σε δύο ελαστικές κρούσεις

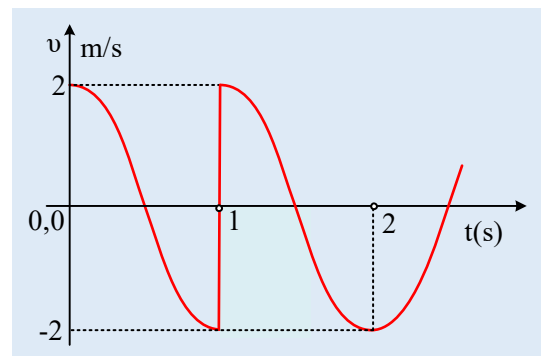
Μια σφαίρα A μάζας $m=1\text{kg}$ κινείται (χωρίς να περιστρέφεται) με ταχύτητα $v_1=4\text{m/s}$, σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα, ίσης ακτίνας και μάζας $M=4\text{kg}$ η οποία είναι ακίνητη.



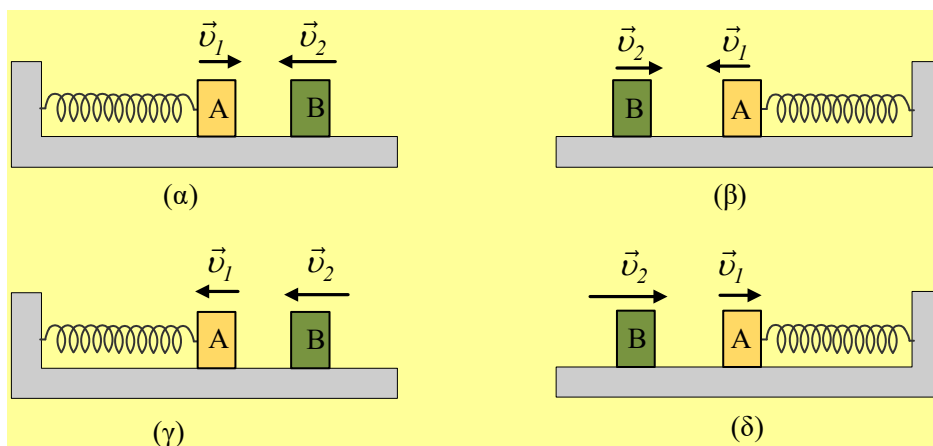
- i) Να αποδείξετε ότι κάποια στιγμή t_1 στη διάρκεια της κρούσης μηδενίζεται η ταχύτητα της A σφαίρας.
- ii) Πόση είναι η μείωση ΔK της κινητικής ενέργειας, τη στιγμή t_1 ;
- iii) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης που θα ασκηθεί στη σφαίρα A, από τη στιγμή t_1 μέχρι το τέλος της κρούσης.
- iv) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα, αν η σφαίρα A συγκρουστεί ελαστικά με κατακόρυφο τοίχο, όπως στο δεύτερο σχήμα;

15) Μπορούμε να βρούμε από την AAT στοιχεία για την κρούση;

Ένα σώμα A μάζας m_1 εκτελεί AAT δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, σε λείο οριζόντιο επίπεδο, όταν τη στιγμή $t_1=1\text{s}$ συγκρούεται μετωπικά με ένα δεύτερο σώμα B. Στο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας του σώματος A σε συνάρτηση με το χρόνο.



- i) Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί η κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων δεν μπορεί να είναι πλαστική;
- ii) Ποιο από τα παρακάτω σχήματα δείχνει την εικόνα των δύο σωμάτων, ελάχιστα πριν την κρούση, αν η προς τα δεξιά κατεύθυνση θεωρηθεί ως θετική;



Δίνεται ότι η κρούση μεταξύ των σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική, ενώ για τις μάζες ισχύει $m_1=2m_2$.

iii) Για το μέτρο της ταχύτητας του B σώματος, πριν την κρούση, ισχύει:

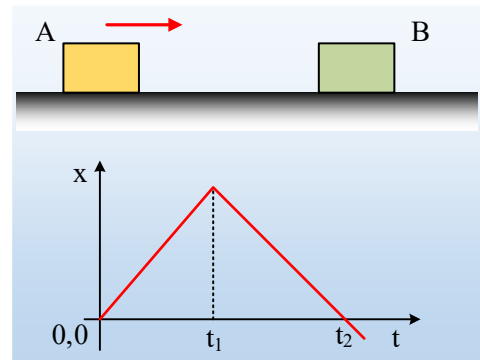
α) $|v_2| < 3\text{m/s}$, β) $3\text{m/s} \leq |v_2| \leq 5\text{m/s}$, γ) $|v_2| > 5\text{m/s}$.

iv) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή $t_2=1,5s$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

16) Μια ελαστική κρούση και το διάγραμμα θέσης

Δύο σώματα A και B ηρεμούν σε οριζόντιο απέχοντας μεταξύ τους απόσταση d , ελεύθερα να κινηθούν. Σε μια στιγμή $t_0=0$ το σώμα A, μάζας $m_1=1kg$, δέχεται ένα στιγμιαίο κτύπημα, αποκτώντας κάποια ταχύτητα, με κατεύθυνση προς το σώμα B, με το οποίο συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά τη στιγμή t_1 . Θεωρώντας την αρχική θέση του σώματος A, ως αρχή ενός προσανατολισμένου άξονα x και θεωρώντας αμελητέα τη διάρκεια της κρούσης, παίρνουμε το διπλανό διάγραμμα της θέσης x , σε συνάρτηση με το χρόνο.



i) Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο ή όχι;

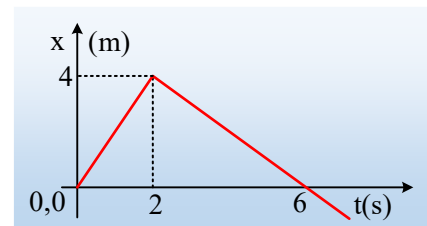
ii) Αν m_2 η μάζα του B σώματος, ισχύει:

$$\alpha) m_1 < m_2, \quad \beta) m_1 = m_2, \quad \gamma) m_1 > m_2,$$

iii) Για τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 ισχύει:

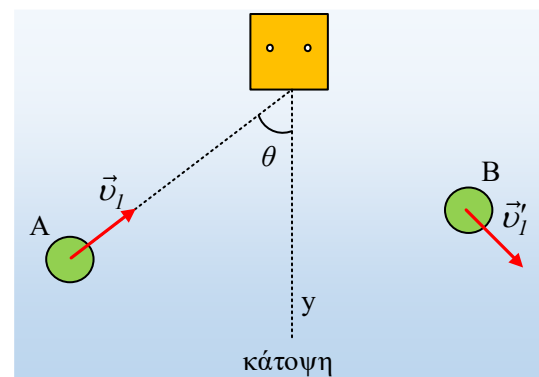
$$\alpha) t_2 < 2t_1, \quad \beta) t_2 = 2t_1, \quad \gamma) t_2 > 2t_1.$$

iv) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, παίρνοντας τώρα ακριβείς μετρήσεις, οπότε σχεδιάζοντας το διάγραμμα $x-t$, παίρνουμε το διπλανό διάγραμμα. Να υπολογιστούν η ορμή και η κινητική ενέργεια του B σώματος, αμέσως μετά την κρούση.



17) Όταν ακόμη και ο τοίχος ...υποχωρεί!

Μια σφαίρα μάζας $m_1=1kg$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $v_1=5m/s$ (χωρίς να στρέφεται) και συγκρούεται ελαστικά με έναν πακτωμένο ακλόνητο κύβο μάζας $m_2=2kg$. Το σημείο κρούσης είναι το κέντρο μιας έδρας του κύβου, ενώ η ταχύτητα v_1 σχηματίζει με την κάθετη στην έδρα στο σημείο κρούσης, γωνία θ , όπου $\eta\mu\theta=0,8$ και $\sigma\upsilon\eta\theta=0,6$, όπως φαίνεται στο σχήμα (σε κάτοψη). Αν δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ των συγκρουόμενων σωμάτων και v_1' η ταχύτητα της σφαίρας μετά την κρούση, να βρεθούν:



i) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας και η μεταβολή της ορμής:

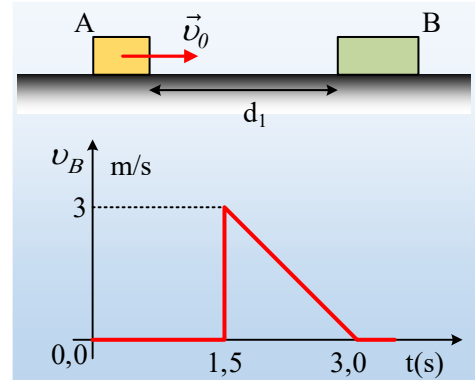
$$\alpha) \text{ της σφαίρας, } \beta) \text{ του κύβου και } \gamma) \text{ του συστήματος των δύο σωμάτων}$$

που οφείλονται στην κρούση.

- ii) Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα, με μόνη διαφορά, ότι έχουμε αφαιρέσει την πάκτωση και ο κύβος έχει την δυνατότητα να κινηθεί, μετά την κρούση. Ποιες θα είναι τώρα οι αντίστοιχες απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα;

18) Πληροφορίες για μια κρούση από ένα διάγραμμα

Δύο σώματα A και B με μάζες $m_1=2\text{kg}$ και $m_2=3\text{kg}$ αντίστοιχα, ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης μ , απέχοντας μεταξύ τους απόσταση d_1 . Σε μια στιγμή $t_0=0$ το σώμα A, δέχεται ένα στιγμιαίο κτύπημα, αποκτώντας αρχική ταχύτητα $v_0=7\text{m/s}$, με κατεύθυνση προς το σώμα B. Μετά από λίγο τα δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά και στο διάγραμμα δίνεται η ταχύτητα του σώματος B σε συνάρτηση με το χρόνο.

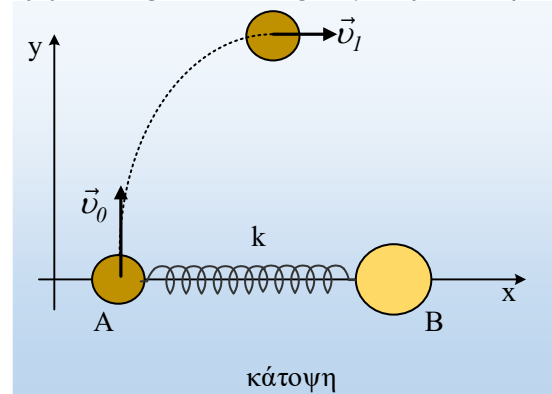


- Να βρεθεί ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ μεταξύ του επιπέδου και των δύο σωμάτων.
- Να υπολογιστεί η αρχική απόσταση d_1 μεταξύ των δύο σωμάτων.
- Να βρεθεί η ταχύτητα του A σώματος αμέσως μετά την κρούση.
- Η παραπάνω κρούση μεταξύ των σωμάτων, είναι ή όχι ελαστική;
- Να βρεθεί η τελική απόσταση d_2 μεταξύ των δύο σωμάτων, όταν πάψουν να κινούνται.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

19) Ένα μηχανικό σύστημα σε οριζόντια κίνηση

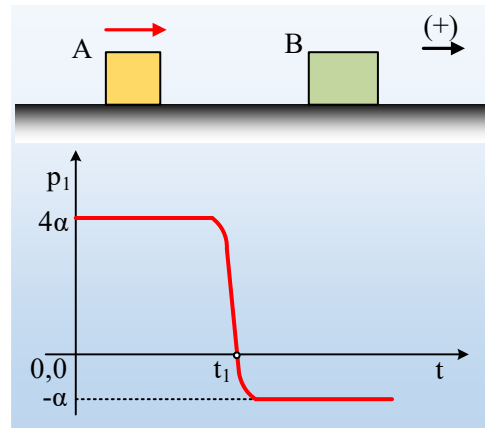
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δύο σφαίρες A και B με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=4\text{kg}$, δεμένες στα άκρα ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=75\text{N/m}$, ο άξονας του οποίου ταυτίζεται με τον άξονα x, ενός ορθογωνίου συστήματος οριζοντίων αξόνων x,y. Σε μια στιγμή η σφαίρα A δέχεται στιγμιαίο κτύπημα, με αποτέλεσμα να αποκτά οριζόντια ταχύτητα κάθετη στον άξονα του ελατηρίου (στην διεύθυνση y) μέτρου $v_0=4\text{m/s}$. Μετά από λίγο, τη στιγμή t_1 , η A σφαίρα έχει ταχύτητα στην διεύθυνση x, μέτρου $v_1=3\text{m/s}$, όπως στο σχήμα. Για την στιγμή αυτή:



- Να υπολογιστούν οι συνιστώσες ταχύτητας της B σφαίρας στους άξονες x και y και στη συνέχεια να βρεθεί και η ταχύτητα της σφαίρας v_2 .
- Να υπολογιστεί η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σφαιρών.
- Να βρεθεί το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής της σφαίρας A.
- Μια επόμενη στιγμή t_2 , το **μέτρο** της ταχύτητας της A σφαίρας είναι $v_A=4\text{m/s}$. Να βρεθεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της B σφαίρας, τη στιγμή αυτή;

20) Πληροφορίες από ένα διάγραμμα ορμής.

Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η μεταβολή της ορμής του σώματος A, μάζας $m_1=m$, που οφείλεται στην κεντρική ελαστική κρούση του με ένα δεύτερο σώμα B, μάζας $m_2=2m$. Τα σώματα βρίσκονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και η προς τα δεξιά κατεύθυνση θεωρείται θετική.



i) Το σώμα B πριν την κρούση:

α) Είναι ακίνητο.

β) Κινείται προς τα δεξιά.

γ) Κινείται προς τα αριστερά.

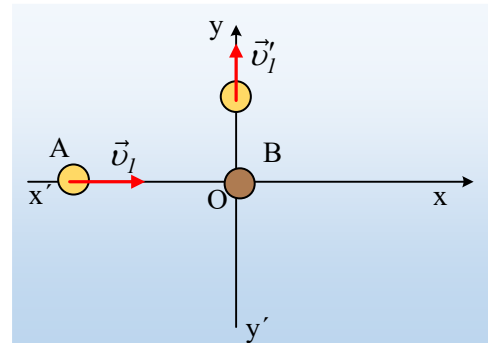
ii) «Τη χρονική στιγμή t_1 που μηδενίζεται η ορμή του A σώματος, τα δυο σώματα έχουν τις ελάχιστες κινητικές τους ενέργειες». Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την πρόταση αυτή;

iii) Η τελική ορμή του σώματος B είναι ίση:

α) α , β) $2,5 \alpha$, γ) $4,5 \alpha$, δ) $5,5 \alpha$.

21) Δύο σφαίρες συγκρούονται σε οριζόντιο επίπεδο

Μια σφαίρα A κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v_1 και συγκρούεται με μια δεύτερη σφαίρα B, ίσης ακτίνας αλλά διαφορετικής μάζας, η οποία ηρεμούσε. Θεωρούμε το ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή O την αρχική θέση της B σφαίρας, ενώ ο άξονας x' συμπίπτει με την διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας της A σφαίρας όπως στο σχήμα (σε κάτοψη). Μετά την κρούση η A σφαίρα κινείται κατά μήκος του ημιάξονα Oy.



Η σφαίρα B θα κινηθεί:

i) Κατά μήκος του ημιάξονα Ox.

ii) Κατά μήκος του ημιάξονα Oy'.

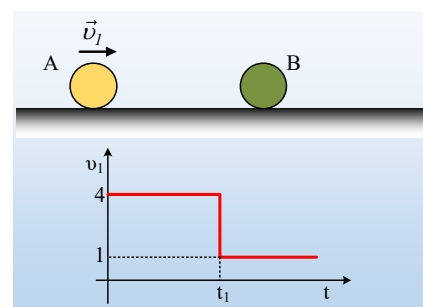
iii) Πάνω στη διχοτόμο της ορθής γωνία $y'Ox$.

iv) Τίποτα από τα παραπάνω.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

22) Μια κεντρική κρούση δύο σφαιρών

Δύο σφαίρες με ίσες ακτίνες κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να στρέφονται. Στο διάγραμμα δίνεται η ταχύτητα της A σφαίρας μάζας $m_1=1\text{kg}$, όπου τη στιγμή t_1 έχουμε μια κεντρική κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών.



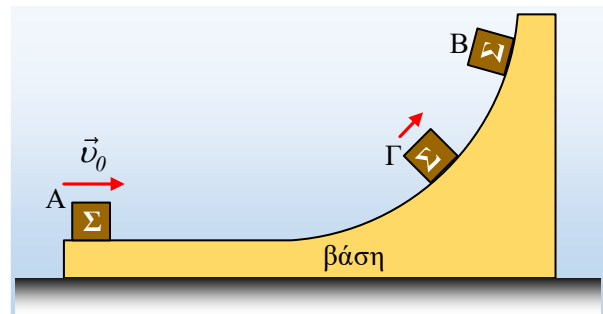
i) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας, που οφείλεται

στην κρούση.

- ii) Να παρασταθεί γραφικά η ορμή της B σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο, αν
- πριν την κρούση έχει ταχύτητα προς τα δεξιά και ορμή μέτρου $p_2=6\text{kg}\cdot\text{m/s}$.
 - πριν την κρούση έχει ταχύτητα προς τα αριστερά και ορμή μέτρου $p_2=2\text{kg}\cdot\text{m/s}$.
- iii) Να υπολογισθεί η αύξηση της κινητικής ενέργειας της σφαίρας B, στην α) περίπτωση, αν η κρούση μεταξύ των σφαιρών είναι ελαστική.
- iv) Να υπολογιστεί η μάζα της σφαίρας B, αν έχουμε ελαστική κρούση και αρχικά η σφαίρα ήταν ακίνητη.

23) Η ορμή για κίνηση πάνω σε βάση

Ένα μικρό σώμα Σ μάζας m ηρεμεί πάνω σε μια βάση, στη θέση A, όπως στο σχήμα. Η βάση έχει μάζα $M=3m$ και βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή το σώμα Σ δέχεται στιγμιαίο κτύπημα, με αποτέλεσμα να αποκτήσει οριζόντια ταχύτητα v_0 και να κινηθεί πάνω στη βάση και μετά από λίγο αρχίζει να ανέρχεται φτάνοντας μέχρι την θέση B του σχήματος, πριν κινηθεί ξανά προς τα κάτω. Τριβές μεταξύ του σώματος Σ και της βάσης, δεν υπάρχουν.



- Στη διάρκεια της μετακίνησης του Σ από το A στο B, η βάση παραμένει ή όχι ακίνητη;
- Στη θέση B, όπου το Σ σταματά να κινείται προς τα πάνω κατά μήκος της βάσης, έχει ταχύτητα:
 - μηδενική.
 - οριζόντια προς τα δεξιά.
 - οριζόντια προς τα αριστερά.
- Να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα της βάσης, μέχρι να φτάσει το σώμα Σ στη θέση B.
- Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος Σ από τη θέση A στη θέση Γ, η ορμή του συστήματος σώμα Σ -βάση, παραμένει σταθερή;

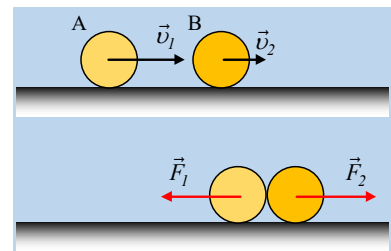
Να δικαιολογήσετε αναλυτικά τις απαντήσεις σας.

Ασκήσεις 2017-20

24) Το έργο δύναμης σε κρούσεις

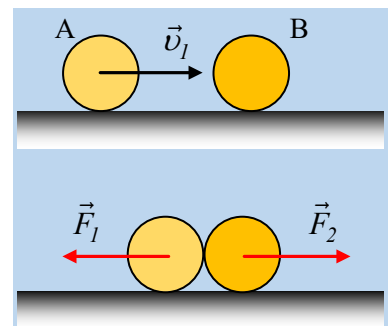
- i) Δύο σφαίρες A και B κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση, σε λείο οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, οπότε μεταξύ τους ασκούνται οι δυνάμεις F_1 και F_2 στη διάρκεια της κρούσης. Για το έργο της δύναμης F_1 ισχύει:

α) $W < 0$, β) $W=0$, γ) $W > 0$



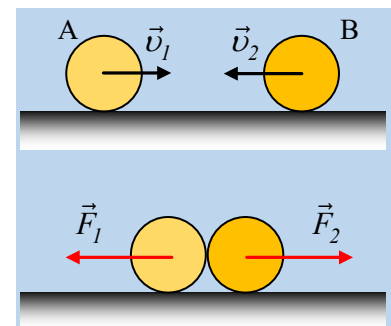
- ii) Μια σφαίρα A κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα B. Αν στη διάρκεια της κρούσης, ασκούνται οι δυνάμεις F_1 και F_2 στις δυο σφαίρες, για το έργο της δύναμης F_1 ισχύει:

α) $W < 0$, β) $W=0$, γ) $W > 0$



- iii) Δύο σφαίρες A και B κινούνται αντίθετα με ίσου μέτρου ταχύτητες και σε μια στιγμή συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Στη διάρκεια της κρούσης, ασκούνται στις δυο σφαίρες οι δυνάμεις F_1 και F_2 . Αν για το έργο της δύναμης F_1 ισχύει $W_{F1}=0$, τότε:

α) $m_1 < m_2$, β) $m_1 = m_2$, γ) $m_1 > m_2$.

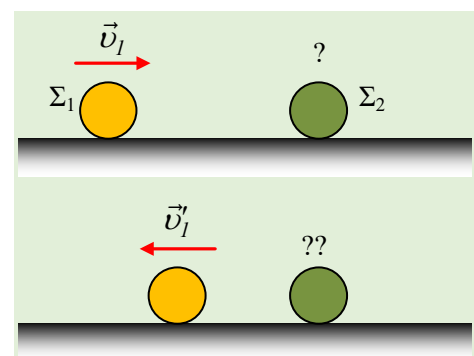


25) Οι ταχύτητες πριν και μετά την κρούση

Μια σφαίρα Σ_1 μάζας m κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, προς τα δεξιά, με ταχύτητα \vec{v}_1 και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη κινούμενη σφαίρα Σ_2 ίσης ακτίνας, με αποτέλεσμα μετά την κρούση, να κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα \vec{v}'_1 ίσου μέτρου ($v_1' = v_1$).

- i) Η σφαίρα Σ_2 πριν την κρούση:

α) Κινείται προς τα δεξιά.



β) κινείται προς τα αριστερά.

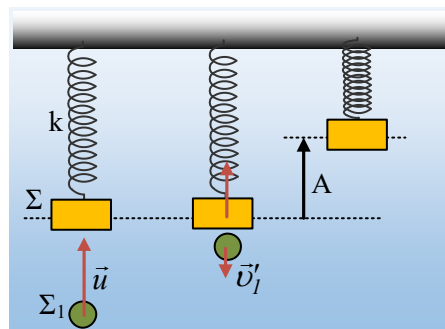
ii) Αν η σφαίρα Σ_2 έχει μάζα $m_2=2m$, τότε για το μέτρο της ταχύτητας \vec{v}'_2 της δεύτερης σφαίρας, μετά την κρούση, ισχύει:

$$\alpha) v'_2 < \frac{v_1}{2}, \quad \beta) v'_2 = \frac{v_1}{2}, \quad \gamma) v'_2 > \frac{v_1}{2}$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

26) Μια κρούση που οδηγεί σε ταλάντωση

Ένα σώμα Σ μάζας $M=2\text{kg}$ ηρεμεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k=200\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε ταβάνι. Μια σφαίρα Σ_1 , μάζας $m=1\text{kg}$, κινείται κατακόρυφα με ταχύτητα u κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και τη στιγμή $t=0$, συγκρούεται με το σώμα Σ , το οποίο μετά την κρούση εκτελεί ΑΑΤ πλάτους $A=0,2\text{m}$, ενώ η σφαίρα αποκτά ταχύτητα αντίθετης φοράς και μέτρου $v'_1=0,8\text{m/s}$.

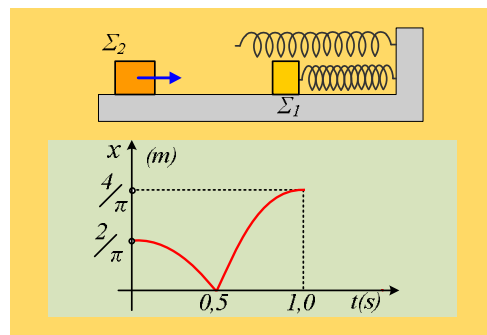


- Να υπολογιστεί η ταχύτητα u της σφαίρας πριν την κρούση.
- Να αποδειχθεί ότι η παραπάνω κρούση είναι ανελαστική και να υπολογιστεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας, στη διάρκεια της.
- Να βρεθούν οι συναρτήσεις της απομάκρυνσης του σώματος Σ και της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική και να παρασταθούν γραφικά.
- Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σωμάτων, τη στιγμή που τα σώματα έχουν την ίδια επιτάχυνση, για δεύτερη φορά.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

27) Το διάγραμμα απομάκρυνσης και δυο κρούσεις.

Ένα σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=2\cdot\pi^2\approx 20\text{N/m}$ και συγκρατείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, έχοντας συμπιέσει το ελατήριο κατά $(2/\pi)\text{m}$. Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου πλησιάζοντας το σώμα Σ_1 . Σε μια στιγμή $t_0=0$, αφήνουμε το Σ_1 να ταλαντωθεί και στο διπλανό σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη στιγμή $t_2=1\text{s}$, όπου μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητά του για πρώτη φορά, μετά την κρούση του με το σώμα Σ_2 .

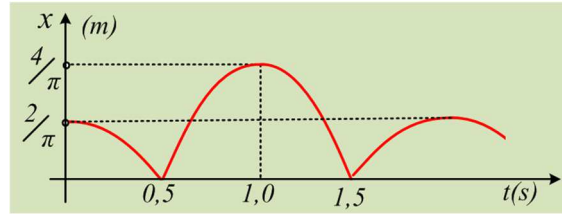


- Να βρεθεί η μάζα του σώματος Σ_1 , καθώς και η ταχύτητά του ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση

του με το σώμα Σ_2 .

ii) Υποστηρίζεται ότι η κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων μπορεί να είναι πλαστική. Να εξετάσετε αν αυτό μπορεί να ισχύει.

iii) Παρακολουθώντας την παραπέρα κίνηση του σώματος Σ_1 , διαπιστώνουμε ότι η απομάκρυνση, από τη θέση ισορροπίας του, μεταβάλλεται συνολικά όπως στο διπλανό σχήμα. Αν οι κρούσεις μεταξύ των σωμάτων είναι ελαστικές:

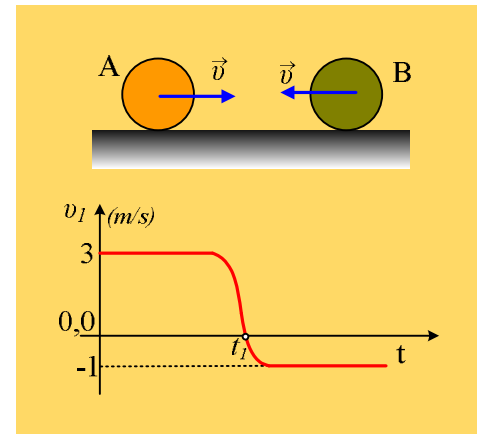


α) Ποια η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 πριν την πρώτη του κρούση με το Σ_1 και ποια αμέσως μετά την κρούση;

β) Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος Σ_2 και η τελική του ταχύτητα.

28) Μια κρούση και πληροφορίες από ένα διάγραμμα

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινούνται δυο ελαστικές σφαίρες με ίσες ακτίνες, η μία προς την άλλη, με ταχύτητες ίσου μέτρου, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και στο διάγραμμα φαίνεται η ταχύτητα της A σφαίρας, η οποία έχει μάζα $m_1=2\text{kg}$, σε συνάρτηση με το χρόνο.



i) Τι ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της A σφαίρας μεταφέρεται στην B σφαίρα, στη διάρκεια της κρούσης;

ii) Αφού υπολογίσετε την μάζα της B σφαίρας, να χαράξετε ένα ποιοτικό διάγραμμα για την ταχύτητα της B σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο.

iii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα της B σφαίρας τη στιγμή t_1 που μηδενίζεται η ταχύτητα της σφαίρας A.

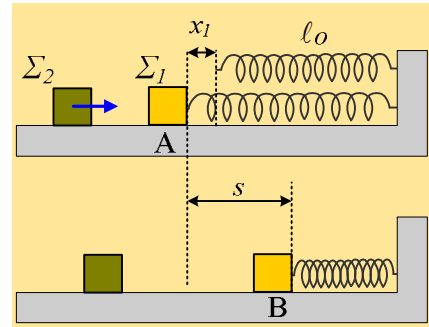
iv) Πόση είναι η δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης των σφαιρών τη στιγμή t_1 ;

v) Ένας μαθητής κοιτάζοντας το διάγραμμα που δίνεται, συμπεραίνει ότι τη στιγμή t_1 η γραφική παράσταση τέμνει σχεδόν κάθετα τον άξονα του χρόνου. Συμφωνείτε ή όχι με την εκτίμηση αυτή; Να δικαιολογήσετε την άποψή σας.

29) Ισορροπίες με τριβές και κρούση.

Πάνω σε ένα μη λείο οριζόντιο επίπεδο, ηρεμεί ένα σώμα Σ_1 μάζας $m_1=2\text{kg}$, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=20\text{N/m}$, το οποίο έχει επιμηκύνει κατά $x_1=0,2\text{m}$. Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2=1\text{kg}$ κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου με κατεύθυνση προς το σώμα Σ_1 , με το οποίο μετά από λίγο συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά. Τα δυο σώματα παρουσιάζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης με το επίπεδο $\mu=0,65$. Μετά την κρούση το Σ_1 διανύει απόσταση $(AB)=s=0,6\text{m}$, μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του, στη θέση B.

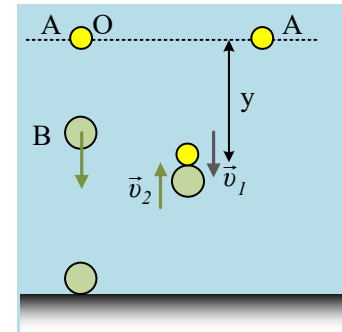
- i) Να υπολογιστεί η τριβή που ασκείται στο σώμα Σ_1 , στη θέση A, πριν την κρούση.
- ii) Να βρεθεί η ταχύτητα την οποία αποκτά το σώμα Σ_1 , αμέσως μετά την κρούση, καθώς και η αντίστοιχη επιτάχυνσή του.
- iii) Τι ποσοστό της κινητικής ενέργειας του Σ_2 ελάχιστα πριν την κρούση, μεταφέρεται στο σώμα Σ_1 ;
- iv) Να βρεθεί η τελική απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων, μετά την ακινητοποίησή τους.



Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

30) Δύο κρούσεις, ένας έλεγχος

Στη θέση O, σε ορισμένο ύψος από το έδαφος, συγκρατούμε δυο σφαίρες A και B με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$. Σε μια στιγμή αφήνουμε την B να πέσει και μετά από λίγο αφήνουμε την A. Η σφαίρα B συγκρούεται με το έδαφος και επιστρέφοντας συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την A, η οποία κατέρχεται, έχοντας τη στιγμή της κρούσης ταχύτητα μέτρου $v_1=3\text{m/s}$. Μετά την κρούση η σφαίρα A επιστρέφει στο σημείο O με μηδενική ταχύτητα.

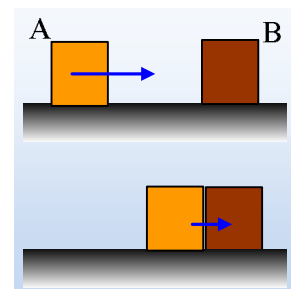


- i) Να υπολογιστεί η κατακόρυφη απόσταση y μεταξύ της αρχικής θέσης O και της θέσης της κρούσης, των δύο σφαιρών.
- ii) Να αποδείξετε ότι η κρούση μεταξύ της σφαίρας B και του εδάφους, είναι ανελαστική.
- iii) Να υπολογίσετε την μεταβολή της ορμής της B σφαίρας κατά την κρούση των δύο σφαιρών.
- iv) Να υπολογιστεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση της σφαίρας B με το έδαφος.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

31) Ελαστική κρούση και ίδιες αποστάσεις

Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δύο σώματα A, B με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, σχήματος κύβου, της ίδιας ακμής και διαφορετικής πυκνότητας. Σε μια στιγμή το σώμα A δέχεται στιγμιαίο κτύπημα με αποτέλεσμα να αποκτήσει κάποια ταχύτητα v_0 με κατεύθυνση προς το σώμα B, με το οποίο συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά, μετά από λίγο. Αν τα σώματα εμφανίζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης με το επίπεδο και μετά την κρούση, σταματούν αφού διανύσουν ίσες αποστάσεις, τότε για τις μάζες των σωμάτων ισχύει:

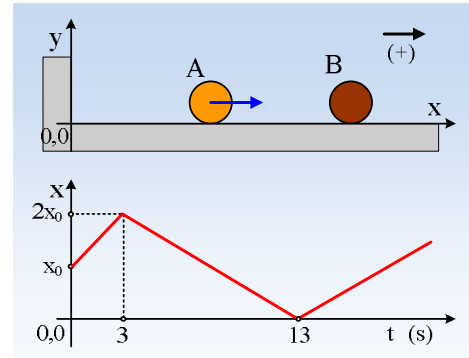


- α) $m_1=2m_2$, β) $m_1=3m_2$, γ) $m_2=2m_1$, δ) $m_2=3m_1$.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

32) Μια διερεύνηση για πολλαπλές κρούσεις

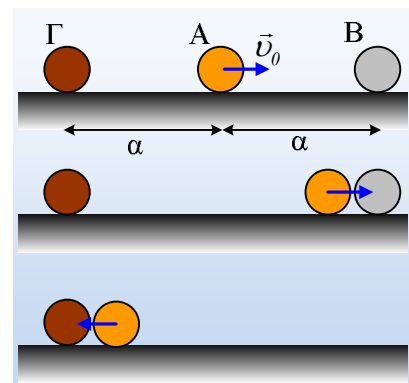
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δύο σφαίρες A, B, της ίδιας ακτίνας και με μάζες m και M αντίστοιχα, σε ευθεία x κάθετη σε κατακόρυφο τοίχο. Σε μια στιγμή $t_0=0$, η A σφαίρα δέχεται στιγμιαίο κτύπημα με τη βοήθεια του οποίου αποκτά ταχύτητα v_0 στη διεύθυνση x . Θεωρώντας ως αρχή ενός άξονα x τη θέση του τοίχου, παίρνουμε το διάγραμμα $x(t)$ του διπλανού σχήματος, για τη θέση της A σφαίρας.



- i) Να περιγράψετε την ακριβή εξέλιξη της κίνησης της A σφαίρας με βάση το διπλανό διάγραμμα $x(t)$.
- ii) Αν όλες οι κρούσεις που συνέβησαν ήταν κεντρικές και ελαστικές, να δικαιολογήσετε γιατί για τις μάζες των δύο σφαιρών ισχύει $m < M$.
- iii) Αν η σφαίρα A έχει μάζα $m=1\text{kg}$ να υπολογιστεί η μάζα M της B σφαίρας.
- iv) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σφαιρών τη χρονική στιγμή $t_1=23\text{s}$, συναρτήσει του x_0 .
- v) Θα υπάρξει νέα κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών μετά τη στιγμή t_1 ; Αν ναι, να βρείτε:
 - α) Τη χρονική στιγμή t_2 όπου θα συμβεί αυτό.
 - β) Τις νέες ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση αυτή.
- vi) Για ποιες τιμές της μάζας M της σφαίρας B, δεν θα είχαμε δεύτερη κρούση μεταξύ των σφαιρών;

33) Πόσες κρούσεις πρόκειται να συμβούν;

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν τρεις σφαίρες A, B και Γ, της ίδιας ακτίνας και με μάζες m , $4m$ και $5m$ αντίστοιχα, στην ίδια ευθεία. Η σφαίρα A απέχει την ίδια απόσταση a , από τις δυο άλλες, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή $t_0=0$, η A σφαίρα δέχεται στιγμιαίο κτύπημα με τη βοήθεια του οποίου αποκτά ταχύτητα μέτρου v_0 , με κατεύθυνση προς την σφαίρα B, με αποτέλεσμα να ακολουθήσουν μια σειρά κρούσεων της σφαίρας A με τις άλλες δύο σφαίρες. Όλες οι κρούσεις θεωρούνται κεντρικές και ελαστικές.

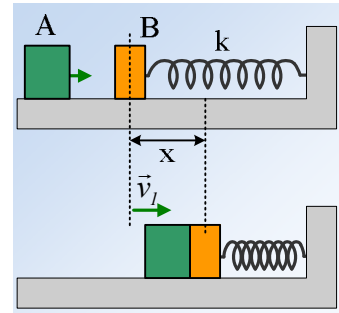


- i) Πόσες τέτοιες κρούσεις πρόκειται να συμβούν;
- ii) Τι ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας A, θα έχει τελικά κάθε σφαίρα, μετά την ολοκλήρωση των κρούσεων;
- iii) Αν $a=6\text{m}$, ενώ $v_0=3\text{m/s}$, να κάνετε τη γραφική παράσταση της απόστασης μεταξύ των σφαιρών A και B σε συνάρτηση με το χρόνο.

34) Δύο διαδοχικές ελαστικές κρούσεις.

Τα σώματα A και B του σχήματος, με μάζες $m_1=4\text{kg}$ και $m_2=1\text{kg}$ εμφανίζονται με το οριζόντιο επίπεδο τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,5$. Το σώμα B ηρεμεί δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου

σταθεράς $k=40\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό του μήκος. Το σώμα Α κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και φτάνει στο σώμα Β με ταχύτητα $u_0=5\text{m/s}$. Η κρούση που ακολουθεί είναι κεντρική και ελαστική. Μετά την κρούση το σώμα Β συμπιέζει το ελατήριο, ενώ μετά από λίγο ακολουθεί δεύτερη κεντρική και ελαστική κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων. Ελάχιστα πριν την 2^η κρούση το σώμα Α έχει ταχύτητα μέτρου $v_1=1,14\text{m/s}$, ενώ αμέσως μετά, ταχύτητα μέτρου $v_1'=1,32\text{m/s}$. Ζητούνται:

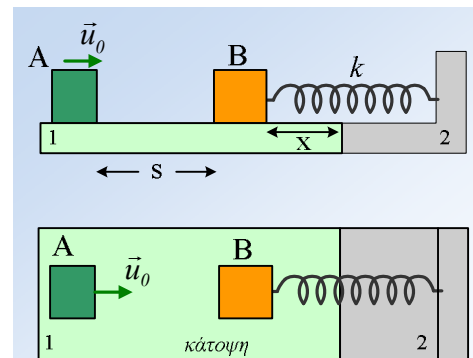


- Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων αμέσως μετά την πρώτη κρούση.
- Η επιτάχυνση κάθε σώματος, όταν το καθένα έχει μετατοπισθεί κατά $\Delta x=0,2\text{m}$, από τη θέση της πρώτης κρούσης.
- Η ταχύτητα του Β σώματος πριν και μετά την 2^η κρούση.
- Η απόσταση x μεταξύ των θέσεων των δύο κρούσεων.
- Η απόσταση που διανύει το σώμα Β μεταξύ των δύο κρούσεων.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, ενώ τα σώματα θεωρούνται υλικά σημεία αμελητέων διαστάσεων.

35) Δύο επίπεδα και μια ελαστική κρούση

Σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο (1) ηρεμούν δύο σώματα Α και Β, όπου το δεύτερο είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=20\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό του μήκος, απέχοντας κατά $s=1,6\text{m}$. Σε μια στιγμή εκτοξεύεται το σώμα Α, μάζας $m_1=2\text{kg}$, με αρχική ταχύτητα $u_0=5\text{m/s}$, προς το σώμα Β, όπως στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος Α και του επιπέδου είναι $\mu_1=0,5$. Μετά από λίγο τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, με αποτέλεσμα το Β να αποκτά ταχύτητα $v_0=3\text{m/s}$ και να αρχίζει να συμπιέζει το ελατήριο. Μόλις το ελατήριο συμπιεστεί κατά $x=0,4\text{m}$, το σώμα Β, έχοντας ταχύτητα $v_1=2\text{m/s}$, περνά σε ένα δεύτερο λείο οριζόντιο επίπεδο (2), στο οποίο κινείται, μέχρι να προκαλέσει μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου κατά Δl . Να βρεθούν:



- Η μάζα του σώματος Β.
- Η τριβή που δέχεται το Β σώμα από το επίπεδο 1.
- Η μέγιστη συμπίεση Δl το ελατηρίου.
- Να εξετασθεί αν τα δυο σώματα θα συγκρουσθούν για δεύτερη φορά.

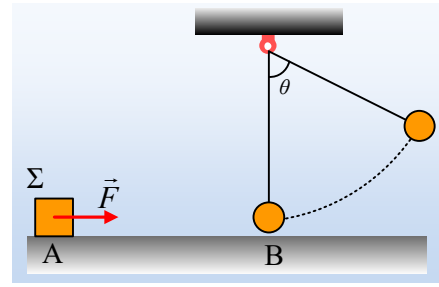
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

36) Μια μεταβαλλόμενη κίνηση και μια κρούση

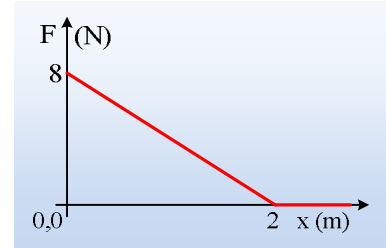
Το σώμα Σ μάζας $m_1=1\text{kg}$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο στη θέση Α, απέχοντας κατά $(AB)=3\text{m}$ από μια σφαίρα που κρέμεται στο άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους $l=0,4\text{m}$. Κάποια στιγμή ασκείται στο Σ μια

μεταβλητή οριζόντια δύναμη F , με κατεύθυνση προς τη σφαίρα, το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται όπως στο διάγραμμα.

Φτάνοντας το σώμα Σ στη θέση B , συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα, η οποία εκτρέπεται από την κατακόρυφο κατά μέγιστη γωνία $\theta=60^\circ$.



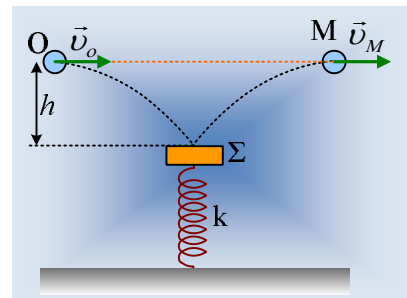
- Να υπολογιστεί η ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα Σ , μέσω της δύναμης F .
- Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ τη στιγμή που έχει μετατοπισθεί κατά $x_1=0,5\text{m}$;
- Να υπολογιστεί η μάζα m_2 της σφαίρας.
- Σε πόσο χρόνο, μετά την κρούση, το σώμα Σ θα περάσει ξανά από τη θέση A ;



Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

37) Μια κρούση στη διάρκεια μιας οριζόντιας βολής

Από μια θέση O , σε ορισμένο ύψος από το έδαφος, εκτοξεύεται οριζόντια μια σφαίρα μάζας $m=1\text{kg}$ με ταχύτητα $v_0=1\text{m/s}$. Η σφαίρα στην πορεία της και αφού μετατοπισθεί κατακόρυφα κατά $h=0,2\text{m}$, συναντά μια πλάκα Σ μάζας $M=2\text{kg}$. Η πλάκα πριν την κρούση ταλαντώνεται κατακόρυφα με πλάτος $A_1=0,3\text{m}$, στο πάνω άκρο ιδανικού ελατηρίου, με φυσικό μήκος $l_0=1,2\text{m}$ και σταθερά $k=25\text{N/m}$. Η κρούση είναι ελαστική, χωρίς να εμφανιστούν τριβές στη διάρκειά της. Μετά από λίγο, η σφαίρα φτάνει



στο σημείο M , στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το σημείο εκτόξευσης O , έχοντας οριζόντια ταχύτητα μέτρου v_M .

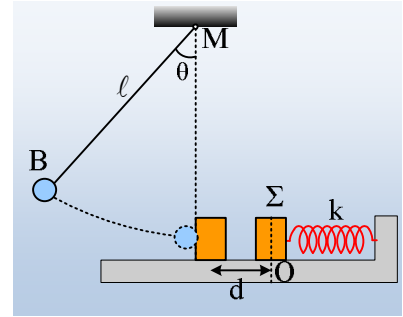
- Να υπολογίσετε την ταχύτητα v_M .
- Να βρείτε την μεταβολή της ορμής της σφαίρας, εξαιτίας της κρούσης.
- Ποια η ταχύτητα της πλάκας ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση της με τη σφαίρα;
- Πόσο απέχει από το έδαφος η πλάκα της στιγμής της κρούσης;
- Να βρεθεί το νέο πλάτος ταλάντωσης της πλάκας, μετά την κρούση.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

38) Στη διάρκεια της ταλάντωσης έχουμε μια κρούση

Ένα σώμα Σ μάζας $M=3\text{kg}$ ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς $k=375\text{N/m}$, γύρω από μια θέση ισορροπίας O , όπως στο σχήμα, έχοντας ενέργεια ταλάντωσης $E_1=7,5\text{J}$. Μια σφαίρα μάζας $m=1\text{kg}$ είναι δεμένη στο άκρο νήματος μήκους $l=2\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερά δεμένο στο σημείο M . Η σφαίρα συγκρατείται στη θέση B , με το νήμα να σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία θ , όπου $\sin\theta=0,6$. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερη τη σφαίρα να κινηθεί και αυτή

συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ , τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο και το Σ απέχει κατά d , από τη θέση ισορροπίας του. Μετά την κρούση η σφαίρα επιστρέφει μέχρι τη θέση που το νήμα να σχηματίσει με την κατακόρυφο γωνία φ , όπου $\sin\varphi=0,9$.

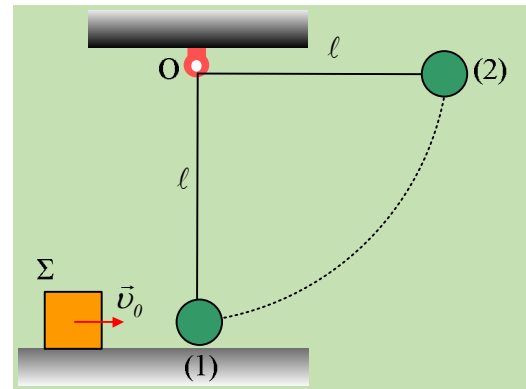


Να υπολογιστούν:

- Οι ταχύτητες της σφαίρας, ελάχιστα πριν την κρούση και αμέσως μετά από αυτήν.
- Οι αντίστοιχες ταχύτητες του σώματος Σ .
- Η απόσταση d της θέσης κρούσης, από τη θέση ισορροπίας του σώματος Σ .
- Η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα Σ , μετά την κρούση.

39) Δυο ελαστικές κρούσεις

Μια σφαίρα μάζας $m=0,5\text{kg}$ ηρεμεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους $\ell=1,25\text{m}$, (θέση 1), το άλλο άκρο του οποίου έχει προσδεθεί σε σταθερό σημείο O . Ένα σώμα Σ μάζας $m_1=2,5\text{kg}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0 σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα, με αποτέλεσμα αυτή μετά την κρούση, να εκτρέπεται μέχρι τη θέση (2), όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο.

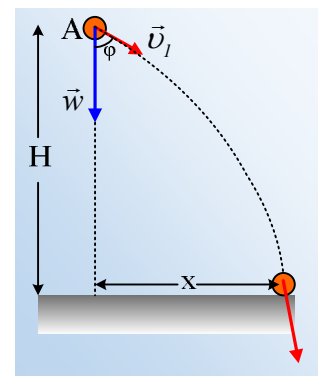


- Να υπολογιστεί η αρχική ταχύτητα v_0 του σώματος Σ , καθώς και η μεταβολή της ορμής του, η οποία οφείλεται στην κρούση.
- Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα το σώμα Σ κινείται με ταχύτητα u_0 , όταν συγκρούεται ξανά κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα. Μετά την κρούση, τη στιγμή που η σφαίρα περνά από την θέση (2), η τάση του νήματος είναι ίση με $T=4,4\text{N}$.
 - Να υπολογιστεί η τάση του νήματος, ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση.
 - Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα u_0 του σώματος Σ πριν την κρούση.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

40) Η αρχή της επαλληλίας... και η ενέργεια

Μια μπάλα μάζας $0,2\text{kg}$ εκτοξεύεται οριζόντια με κάποια αρχική ταχύτητα, με αποτέλεσμα σε μια στιγμή, που θεωρούμε $t=0$, να περνά από σημείο A , με ταχύτητα μέτρου $v_1=5\text{m/s}$, η οποία σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφη, όπου $\eta\mu\theta=0,6$ και $\sin\varphi=0,8$, όπως στο διπλανό σχήμα. Η μπάλα φτάνει στο έδαφος μετά από 2s .



- Υποστηρίζει κάποιος τη θέση, ότι η κίνηση της μπάλας μπορεί να μελετηθεί με βάση την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων. Μια ευθύγραμμη ομαλή στη

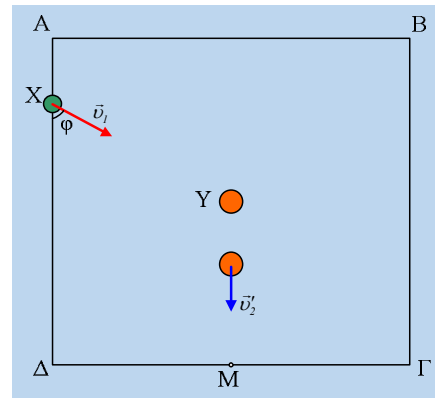
διεύθυνση της ταχύτητας v_1 και μια ελεύθερη πτώση στη κατακόρυφη διεύθυνση. Είναι σωστή η θέση αυτή;

- ii) Αν είναι σωστή, να εφαρμοστεί για να υπολογιστεί το μέτρο της τελικής ταχύτητας της μπάλας, καθώς και η τελική της κινητική ενέργεια.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

41) Κρούσεις μέσα σε ένα δωμάτιο

Στο κέντρο της βάσης ΑΒΓΔ ενός δωματίου, σχήματος τετραγώνου και πλευράς $a=4\text{m}$, ηρεμεί μια σφαίρα Y μάζας $M=0,2\text{kg}$. Κάποια στιγμή εκτοξεύεται οριζόντια, από κάποιο σημείο του δαπέδου, μια σφαίρα X, μάζας $m=0,1\text{kg}$ με ταχύτητα $v_1=5\text{m/s}$, η οποία σχηματίζει με την πλευρά ΑΔ γωνία φ (ημ $\varphi=0,8$ και συν $\varphi=0,6$). Οι δυο σφαίρες συγκρούονται ελαστικά τη στιγμή $t=0$ και στη συνέχεια η σφαίρα Y φτάνει στο μέσον Μ της πλευράς ΓΔ, όπου και συγκρούεται ελαστικά με τον τοίχο.

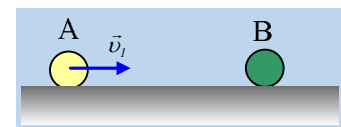


Δίνεται ότι δεν αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής, ούτε κατά την κίνηση των σφαιρών, ούτε στη διάρκεια των κρούσεων, ενώ η διάρκεια των κρούσεων θεωρείται αμελητέα.

- Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα Y θα συγκρουστεί με τοίχο για πρώτη και δεύτερη φορά;
- Με ποια πλευρά του δωματίου θα συγκρουστεί η σφαίρα X, μετά την κρούση της με τη σφαίρα Y; Ποια χρονική στιγμή θα συμβεί αυτό;
- Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας X:
 - Κατά την κρούση της με τη σφαίρα Y.
 - Κατά την πρώτη ελαστική της κρούση με τον τοίχο.

42) Η μέγιστη κινητική ενέργεια...

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, κινούνται στην ίδια ευθεία δύο σφαίρες A και B με ίσες ακτίνες, οι οποίες κάποια στιγμή συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Δίνεται ότι $m_A=m$ και $m_B=2m$, ενώ πριν την κρούση η A σφαίρα έχει ταχύτητα μέτρου v_1 με φορά προς τα δεξιά.



- Αν κατά την κρούση η σφαίρα A αυξάνει την κινητική της ενέργεια, τότε η ταχύτητα της B σφαίρας πριν την κρούση:
 - Έχει φορά προς τα δεξιά.
 - Είναι μηδενική
 - έχει φορά προς τα αριστερά.
- Αν η σφαίρα B, μεταφέρει στην A σφαίρα το 100% της κινητικής της ενέργειας, τότε η ταχύτητά της πριν την κρούση είχε μέτρο:

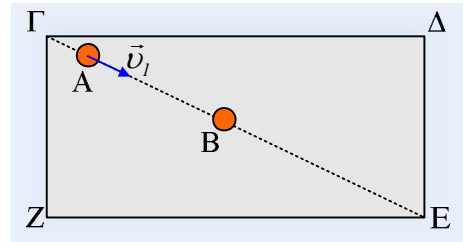
α) $v_2=v_1$, β) $v_2=2v_1$, γ) $v_2=3v_1$.

iii) Στην παραπάνω περίπτωση, η μέγιστη κινητική ενέργεια που αποκτά η σφαίρα A μετά την κρούση, είναι:

$$\alpha) K_{\max} = \frac{1}{2} m v_1^2, \quad \beta) K_{\max} = 4 \cdot \frac{1}{2} m v_1^2, \quad \gamma) K_{\max} = 8 \cdot \frac{1}{2} m v_1^2, \quad \delta) K_{\max} = 9 \cdot \frac{1}{2} m v_1^2.$$

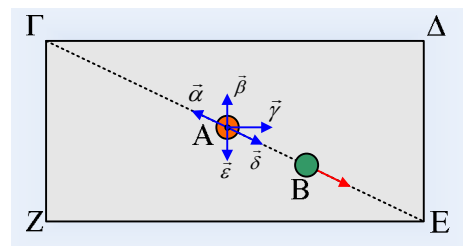
43) Κάποιες ελαστικές κρούσεις...

Σε λείο δάπεδο ενός ορθογώνιου δωματίου ΓΔΕΖ, εκτοξεύουμε μια σφαίρα A, μάζας m, από την κορυφή Γ με κατεύθυνση την απέναντι κορυφή E, όπως στο σχήμα. Στην πορεία της η σφαίρα A συγκρούεται ελαστικά με ακίνητη σφαίρα B, μάζας M. Μετά την κρούση η σφαίρα B φτάνει στην κορυφή E.



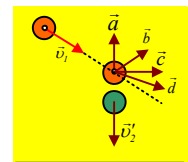
i) Ποιο από τα διανύσματα α,β,γ,δ και ε, μπορεί να παριστά την ταχύτητα της A σφαίρας μετά την κρούση; Υπάρχει περίπτωση, κανένα από τα διανύσματα αυτά να μην παριστά την ταχύτητα της σφαίρας A; Να εξετάσετε τρεις περιπτώσεις:

$$\alpha) m < M, \quad \beta) m = M \quad \text{και} \quad \gamma) m > M$$



ii) Σε μια επανάληψη του πειράματος, η σφαίρα B μετά την κρούση, πέφτει κάθετα στον τοίχο ZE.

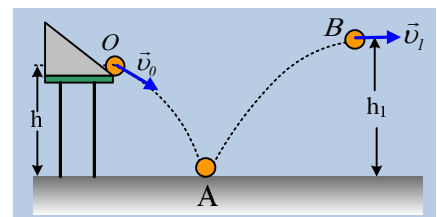
Ποιο από τα διανύσματα a, b, c, d μπορεί να παριστά την ταχύτητα της A σφαίρας, μετά την κρούση; Να εξετάσετε τις τρεις περιπτώσεις για τη σχέση μαζών, όπως και προηγούμενος.



Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

44) Μια πλάγια βολή και μια κρούση.

Μια μπάλα εγκαταλείπει ένα κεκλιμένο επίπεδο που βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι με ταχύτητα v_0 , όπως στο σχήμα, από σημείο O σε ύψος h. Η μπάλα συγκρούεται ελαστικά με το λείο έδαφος, στη θέση A και στη συνέχεια φτάνει σε μέγιστο ύψος από το έδαφος h_1 , θέση B.



i) Για το μέτρο της ταχύτητας στο μέγιστο ύψος (θέση B) ισχύει:

$$\alpha) v_1 < v_0, \quad \beta) v_1 = v_0, \quad \gamma) v_1 > v_0.$$

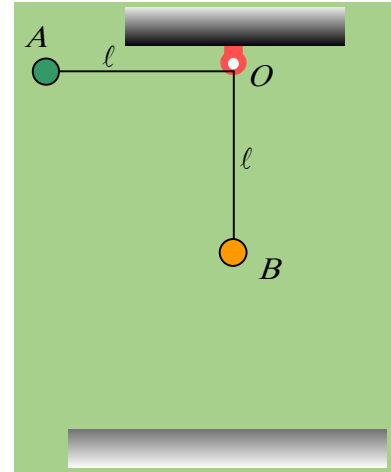
ii) Για τα ύψη στις θέσεις O και B, ισχύει:

$$\alpha) h_1 < h, \quad \beta) h_1 = h, \quad \gamma) h_1 > h.$$

45) Μια κρούση και η σύνδεση με τα προηγούμενα...

Δύο σφαίρες A και B, με μάζες $m_1=2\text{kg}$ και $m_2=3\text{kg}$ αντίστοιχα κρέμονται από το ίδιο σημείο O, με νήματα ίδιου μήκους $l=1,25\text{m}$. Το O απέχει από το έδαφος απόσταση 2,5m. Φέρνουμε την A σφαίρα στη θέση που δείχνει το διπλανό σχήμα, όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο και την αφήνουμε να κινηθεί. Μετά από λίγο οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, ενώ το νήμα που συγκρατεί την σφαίρα A κόβεται ελάχιστα πριν την κρούση.

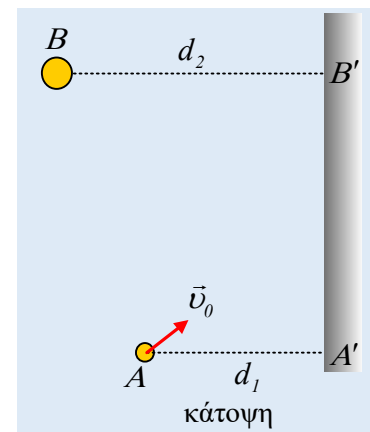
- i) Να υπολογιστούν οι ταχύτητες της Α σφαίρας ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση.
- ii) Να βρεθεί η μέγιστη γωνία εκτροπής του νήματος που συνδέει την σφαίρα Β, με την κατακόρυφη, μετά την κρούση.
- iii) Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί το νήμα στην σφαίρα Β:
 - α) πριν την κρούση, β) αμέσως μετά την κρούση, γ) στη θέση μηδενισμού της ταχύτητάς της.
- iv) Σε πόση απόσταση, από την κατακόρυφη που περνά από το Ο, η σφαίρα Α θα κτυπήσει στο έδαφος;



Οι σφαίρες να θεωρηθούν υλικά σημεία αμελητέας ακτίνας, ενώ $g=10\text{m/s}^2$.

46) Κρούση μετά από ανάκλαση

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο μικρές σφαίρες με μάζες $m_1=0,2\text{kg}$ και $m_2=0,8\text{kg}$ αντίστοιχα στα σημεία Α και Β. Οι σφαίρες απέχουν από κατακόρυφο τοίχο αποστάσεις $d_1=(AA')=1,2\text{m}$ και $d_2=(BB')=2\text{m}$, ενώ $(A'B')=D=2,4\text{m}$. Τη στιγμή $t=0$, η πρώτη σφαίρα δέχεται κατάλληλο κτύπημα αποκτώντας ταχύτητα v_0 , με αποτέλεσμα, μετά την ελαστική κρούση της με τον τοίχο, να συγκρουσθεί τη στιγμή $t_1=2\text{s}$ με τη δεύτερη σφαίρα κεντρικά και ελαστικά.

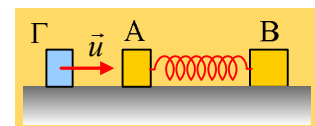


- i) Σε ποιο σημείο του τοίχου έγινε η ανάκλαση της σφαίρας και ποιο το μέτρο της αρχικής ταχύτητας v_0 ;
- ii) Να υπολογισθεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας κατά την κρούση της με τον τοίχο.
- iii) Θα επιστρέψει ξανά η πρώτη σφαίρα στην αρχική της θέση Α και αν ναι, ποια χρονική στιγμή θα συμβεί αυτό;

Ο τοίχος είναι λείος και η διάρκεια των κρούσεων αμελητέα.

47) Μια επικείμενη ολίσθηση

Δυο σώματα Α και Β ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζουν συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,4$, δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=260\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του.



Ένα τρίτο σώμα Γ, μάζας $m=0,5\text{kg}$ κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Α, έχοντας τη στιγμή της κρούσης ταχύτητα u . Το σώμα Α, μάζας $m_1=1\text{kg}$, αποκτά ταχύτητα $v_0=4\text{m/s}$ αμέσως μετά την κρούση.

- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα u του σώματος Γ, πριν την κρούση.
- ii) Να υπολογιστούν οι ρυθμοί μεταβολής της ορμής και της κινητικής ενέργειας του σώματος Α, αμέσως μετά την κρούση.

Αν το σώμα Β ξεκινά την ολίσθησή του, μόλις το σώμα Α διανύσει απόσταση $x=0,2\text{m}$:

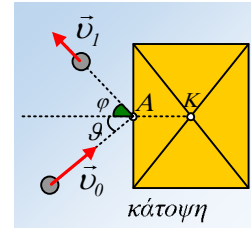
iii) Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος Β.

iv) Να υπολογιστούν οι ρυθμοί μεταβολής της ορμής και της κινητικής ενέργειας των σωμάτων Α και Β, ελάχιστα πριν αρχίσει η ολίσθηση του Β σώματος.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

48) Μια κρούση σφαίρας με ορθογώνια πλάκα

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο έχουμε καρφώσει μια ορθογώνια πλάκα κέντρου Κ και μάζας $M=1,2\text{kg}$. Μια μικρή σφαίρα μάζας $m=0,4\text{kg}$ κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς τριβές, με ταχύτητα $v_0=5\text{m/s}$ και συγκρούεται ελαστικά στο σημείο Α, με την μια πλευρά του ορθογωνίου. Η ταχύτητα αυτή σχηματίζει γωνία θ , όπου $\eta\mu\theta=0,6$ με την κάθετη στην πλευρά, η οποία διέρχεται και από το κέντρο Κ της πλάκας, όπως στο σχήμα (σε κάτοψη). Η κρούση διαρκεί απειροελάχιστα και στη διάρκειά της δεν αναπτύσσονται τριβές μεταξύ σφαίρας και πλάκας (λείες επιφάνειες).



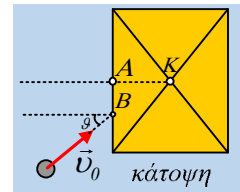
i) Να βρεθεί η ταχύτητα της σφαίρας μετά την κρούση και η γωνία φ που σχηματίζει αυτή με την κάθετη ΑΚ.

ii) Απελευθερώνουμε την πλάκα και επαναλαμβάνουμε το ίδιο ακριβώς πείραμα, αλλά τώρα η πλάκα μπορεί να κινηθεί μετά την κρούση.

α) Ποια η τελική ταχύτητα της σφαίρας και ποια η νέα γωνία φ_1 που σχηματίζει με την ΑΚ;

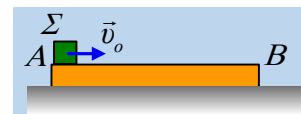
β) Ποια η ταχύτητα της πλάκας μετά την κρούση;

iii) Σε μια επανάληψη του πειράματος η σφαίρα συγκρούεται με την πλάκα στο σημείο Β του σχήματος. Θα αλλάξει κάτι όσον αφορά τις κινήσεις των δύο σωμάτων μετά την κρούση;



49) Ένα σύστημα, η ορμή και η ενέργεια

Μια λεπτή σανίδα ΑΒ, μήκους 4m και μάζας $M=1\text{kg}$, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στη σανίδα και στο αριστερό άκρο της Α ηρεμεί ένα μικρό σώμα Σ, μάζας $m=0,2\text{kg}$. Κάποια στιγμή $t_0=0$ το Σ δέχεται στιγμιαίο κτύπημα, με αποτέλεσμα να αποκτήσει αρχική ταχύτητα $v_0=4\text{m/s}$ και να κινηθεί κατά μήκος της σανίδας.



Αν τη στιγμή $t_1=1\text{s}$, το Σ έχει ταχύτητα $v_1=2\text{m/s}$, να βρεθούν τη χρονική αυτή στιγμή:

i) Η ταχύτητα της σανίδας.

ii) Οι ρυθμοί μεταβολής της ορμής, του σώματος Σ, της σανίδας και του συστήματος σώμα Σ-σανίδα.

iii) Η απόσταση του σώματος Σ από το άκρο Β της σανίδας.

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ και της σανίδας, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας των τριβών.

Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα η σανίδα αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει

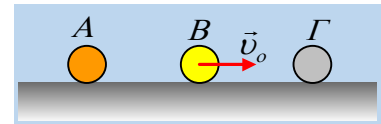
τριβή με συντελεστές τριβής $\mu_s = \mu = 0,02$. Ξανά για τη στιγμή $t_1 = 1\text{s}$, να υπολογιστούν:

- ν) Οι ταχύτητες του Σ και της σανίδας.
 νι) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ και της σανίδας, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας των τριβών.

Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

50) Πόσες κρούσεις θα συμβούν;

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο και στην ίδια ευθεία, ηρεμούν τρεις μικρές σφαίρες A, B και Γ της ίδιας ακτίνας με μάζες 2m , m και 4m αντίστοιχα. Σε μια στιγμή δίνουμε ένα στιγμιαίο κτύπημα στην μεσαία σφαίρα B, με αποτέλεσμα να αποκτήσει ταχύτητα μέτρου v_0 με κατεύθυνση προς τη σφαίρα Γ, όπως στο σχήμα (η σφαίρα μεταφέρεται χωρίς να περιστρέφεται). Οι κρούσεις που θα ακολουθήσουν είναι κεντρικές και ελαστικές.



- i) Ο συνολικός αριθμός κρούσεων που θα ακολουθήσει είναι:

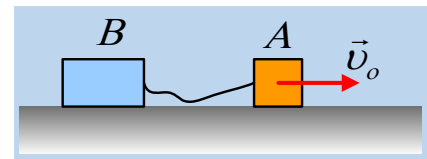
α) μία, β) δύο, γ) τρεις.

- ii) Μόλις ολοκληρωθούν οι κρούσεις, η απόσταση μεταξύ των σφαιρών A και Γ θα αυξάνεται με ρυθμό:

α) $0,6v_0$, β) $0,8v_0$, γ) v_0 .

51) Το τέντωμα του νήματος

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα A και B με μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ και $m_2 = 3\text{kg}$ αντίστοιχα, τα οποία συνδέονται με ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα, το οποίο έχει μήκος μεγαλύτερο από την απόσταση μεταξύ των σωμάτων, με αποτέλεσμα να είναι χαλαρό.



Σε μια στιγμή το σώμα A δέχεται στιγμιαίο κτύπημα, με αποτέλεσμα να αποκτήσει ταχύτητα $v_0 = 4\text{m/s}$, όπως στο σχήμα.

- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα των δύο σωμάτων μετά το τέντωμα του νήματος.
 ii) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται κατά τη διάρκεια του τεντώματος του νήματος;

Ασκήσεις 2013-16

52) Η μεταφορά ορμής.

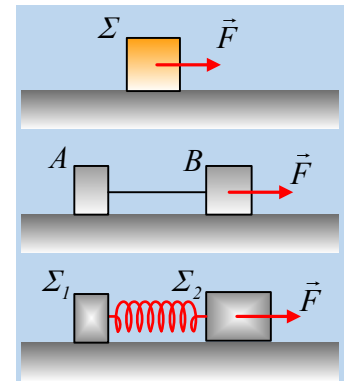
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα Σ μάζας M . Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ στο σώμα ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=2\text{N}$.

i) Ποια η ορμή του σώματος Σ τη στιγμή $t_1=10\text{s}$;

ii) Αν στη θέση του σώματος Σ , είχαμε δυο σώματα A και B με μάζες m και $3m$, τα οποία συνδέονται με αβαρές νήμα και ασκούσαμε την ίδια δύναμη στο σώμα B , να βρεθεί η ορμή κάθε σώματος τη στιγμή t_1 .

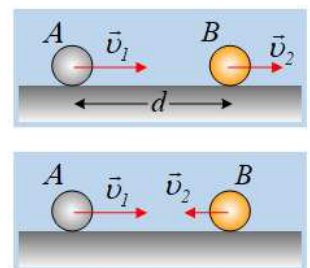
iii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα έχουμε τα σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=4\text{kg}$, τα οποία συνδέονται με ιδανικό ελατήριο, όπως στο τρίτο σχήμα. Ασκούμε ξανά την ίδια δύναμη στο σώμα Σ_2 , οπότε τη στιγμή t_1 το σώμα Σ_2 , έχει ταχύτητα μέτρου $v_2=3\text{m/s}$. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος Σ_1 την ίδια χρονική στιγμή t_1 .

iv) Τη στιγμή t_1 σταματά να ασκείται η δύναμη F . Μια επόμενη χρονική στιγμή t_2 η ταχύτητα του σώματος Σ_1 μηδενίζεται στιγμιαία. Να βρεθεί η ταχύτητα του Σ_2 τη στιγμή αυτή.



53) Οι ταχύτητες σε ελαστικές κρούσεις.

Οι σφαίρες A και B του διπλανού σχήματος, με ίσες ακτίνες και μάζες m και $3m$ αντίστοιχα, κινούνται στην ίδια ευθεία, σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με ταχύτητες v_1 και $v_2=4\text{m/s}$, χωρίς να στρέφονται. Κάποια στιγμή $t=0$, οι σφαίρες απέχουν κατά $d=8\text{m}$, ενώ μετά την κεντρική και ελαστική μεταξύ τους κρούση, η A σφαίρα ακινητοποιείται.



i) Να βρεθεί η ταχύτητα v_1 της A σφαίρας.

ii) Πόσο απέχουν οι σφαίρες μεταξύ τους τη στιγμή $t_1=3\text{s}$, αν η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα;

iii) Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κρούση, αν η σφαίρα A είχε ταχύτητα:

α) $v_1=6\text{m/s}$ και β) $v_1=16\text{m/s}$.

iv) Αν οι δυο σφαίρες κινούνται αντίθετα, όπως στο δεύτερο σχήμα, με τη B να έχει ταχύτητα μέτρου 4m/s , να υπολογιστεί η ταχύτητα της A σφαίρας, αν μετά την κρούση, η B παραμένει ακίνητη.

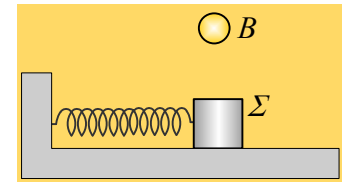
54) Η ορμή και η ενέργεια ταλάντωσης σε μια πλαστική κρούση.

Το σώμα Σ ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου με πλάτος A και περίοδο T . Το σώμα B πέφτει ελεύθερα και σε μια στιγμή συγκρούεται πλαστικά με το Σ . Το σύστημα

συνεχίζει να ταλαντώνεται και μετά την κρούση.

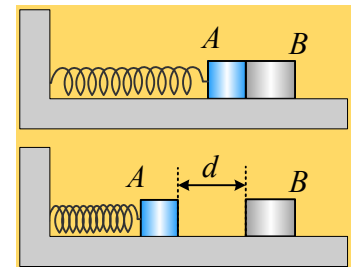
Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες:

- Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης παρέμεινε η ίδια.
- Η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων παραμένει σταθερή στη διάρκεια της κρούσης.
- Η ορμή του συστήματος στην οριζόντια διεύθυνση, ελάχιστα πριν την κρούση, είναι ίση με την ορμή ελάχιστα μετά την κρούση.
- Η περίοδος της ταλάντωσης αυξήθηκε μετά την κρούση.
- Γενικά η ενέργεια της ταλάντωσης μειώνεται, αλλά υπάρχει περίπτωση και να παραμείνει σταθερή.



55) Ταλαντώσεις και κρούσεις...

Το σώμα Α μάζας $m=0,2\text{kg}$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k=50\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Το σώμα Α βρίσκεται σε επαφή με δεύτερο σώμα Β, μάζας M .

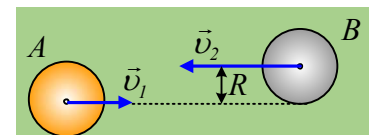


Εκτρέπουμε το σώμα Α προς τα αριστερά, συμπιέζοντας το ελατήριο κατά $d=0,4\text{m}$ και το αφήνουμε να ταλαντωθεί, οπότε μετά από λίγο, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Β.

- Αν το σώμα Β έχει μάζα $M=0,6\text{kg}$, να υπολογιστούν:
 - Η ταχύτητα του σώματος Α πριν και μετά την κρούση.
 - Η απόσταση των δύο σωμάτων, τη στιγμή που θα μηδενιστεί για δεύτερη φορά (μετά την κρούση) η ταχύτητα του Α σώματος, καθώς και το διάστημα που θα έχει διανύσει μέχρι τη στιγμή αυτή, κάθε σώμα.
- Αν $M=3\text{kg}$, ζητούνται:
 - Η μεταβολή της ορμής και της κινητικής ενέργειας του σώματος Α, στη διάρκεια της κρούσης του με το σώμα Β.
 - Να αποδειχθεί ότι τα δυο σώματα θα συγκρουστούν ξανά για δεύτερη φορά.

56) Μια έκκεντρη κρούση δύο σφαιρών.

Δύο λείες, ομογενείς σφαίρες με μάζες $m_1=0,1\text{kg}$, $m_2=0,2\text{kg}$ και την ίδια ακτίνα R , κινούνται χωρίς να περιστρέφονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με παράλληλες ταχύτητες μέτρων $v_1=0,6\text{m/s}$ και $v_2=0,9\text{m/s}$, όπως στο σχήμα, όπου η απόσταση των φορέων των ταχυτήτων είναι ίση με την ακτίνα των σφαιρών. Οι σφαίρες συγκρούονται ελαστικά.

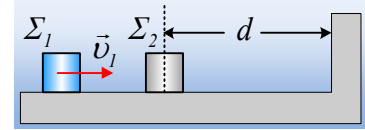


- Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κρούση.
- Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας, που οφείλεται στην κρούση.

iii) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F_1 που ασκήθηκε στη διάρκεια της κρούσης στην Α σφαίρα.

57) Κρούσεις και μεταβολή της ορμής.

Ένα σώμα Σ_1 μάζας 2kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα $v_1=3\text{m/s}$ με διεύθυνση κάθετη σε κατακόρυφο τοίχο. Στην πορεία του συναντά δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας 1kg, το οποίο απέχει κατά $d=6\text{m}$ από τον τοίχο. Τα δυο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Αν το Σ_2 συγκρούεται στη συνέχεια επίσης ελαστικά με τον τοίχο, ζητούνται:

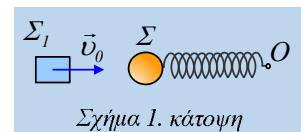


- i) Οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 μετά την πρώτη κρούση τους.
- ii) Η απόσταση από τον τοίχο που θα πραγματοποιηθεί η δεύτερη κρούση μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 .
- iii) Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 , που οφείλεται:
 - α) στην πρώτη κρούση με το Σ_2 .
 - β) στην δεύτερη μεταξύ τους κρούση.

Τα δυο σώματα θεωρούνται υλικά σημεία αμελητέων διαστάσεων (σε σχέση με τα 6m της απόστασης $d!$), αλλά και η διάρκεια των κρούσεων θεωρείται επίσης αμελητέα.

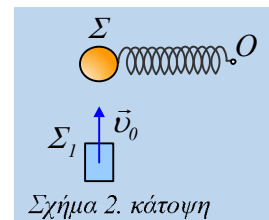
58) Μετά την ελαστική κρούση.

Ένα σώμα Σ μάζας 2kg, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου με μήκος $\ell=2\text{m}$ και σταθεράς $k=50\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου έχει προσδεθεί σε σταθερό σημείο O . Ένα δεύτερο σώμα Σ_1 , μάζας 1kg κινείται με ταχύτητα $v_0=7,5\text{m/s}$ στην κατεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα 1. και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Σ .



- i) Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο σωμάτων, αμέσως μετά την κρούση.
- ii) Ποιο το μέγιστο και ποιο το ελάχιστο μήκος του ελατηρίου;
- iii) Σε μια στιγμή t_1 η ταχύτητα του σώματος Σ παίρνει τιμή $v_1=4\text{m/s}$ για πρώτη φορά. Ποιο το μήκος και ποιος ο ρυθμός μεταβολής του μήκους του ελατηρίου τη στιγμή αυτή;

Σε μια επανάληψη της κρούσης, το σώμα Σ_1 έχει ίδιου μέτρου ταχύτητα v_0 , αλλά τώρα κινείται κάθετα στον άξονα του ελατηρίου (σχήμα 2), ενώ η κρούση μεταξύ των σωμάτων είναι ξανά κεντρική και ελαστική.

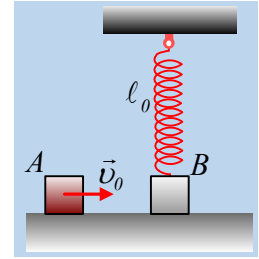


- iv) Ο Αντώνης, υποστηρίζει ότι τώρα το σώμα Σ , μετά την κρούση θα εκτελέσει κυκλική κίνηση γύρω από το άκρο O του ελατηρίου. Να εξετάσετε αν αυτό, είναι μια σωστή θέση.
- v) Κάποια επόμενη στιγμή t_2 η ταχύτητα του σώματος Σ , έχει μέτρο $v_1=4\text{m/s}$, ενώ το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί. Πόσο απέχει από το O το σώμα Σ , τη στιγμή αυτή και πόση επιτάχυνση έχει;
- vi) Ένας δεύτερος μαθητής, ο Βασίλης, υποστηρίζει ότι τη στιγμή t_2 , η επιτάχυνση του σώματος Σ είναι κεντρομόλος. Είναι σωστός ή λάθος ο παραπάνω ισχυρισμός;

vii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου τη στιγμή t_2 ;

59) Ας βγάλουμε την τρίχα και ας απογειωθούμε!

Ένα σώμα Α μάζας $m=0,5\text{kg}$ κινείται ευθύγραμμα σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v_0 και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο σώμα Β, μάζας $M=1\text{kg}$, το οποίο ηρεμεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου, το οποίο έχει το φυσικό του μήκος $l_0=2\text{m}$ και σταθερά $k=50\text{N/m}$, όπως στο διπλανό σχήμα. Το σώμα Α μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $v_A'=2,5\text{m/s}$.

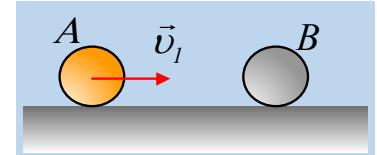


- Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα v_0 του Α σώματος, καθώς και η κινητική ενέργεια που μεταφέρθηκε στη διάρκεια της κρούσης στο σώμα Β.
- Να υπολογίσετε το μήκος του ελατηρίου τη στιγμή που το σώμα Β χάνει την επαφή με το οριζόντιο επίπεδο.
- Την παραπάνω χρονική στιγμή να υπολογιστούν η κινητική ενέργεια και η επιτάχυνση του σώματος Β.
- Αν το μέγιστο ύψος από το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο θα φτάσει το σώμα Β είναι $H=1\text{m}$, ενώ στη θέση αυτή το ελατήριο έχει μήκος $l=1,7\text{m}$, να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση αυτή.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, ενώ η δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης του ελατηρίου δίνεται από την σχέση $U = \frac{1}{2} k(\Delta l)^2$, ενώ οι διαστάσεις των σωμάτων θεωρούνται αμελητέες, θεωρούνται δηλαδή υλικά σημεία.

60) Κρούση σφαίρας με άλλη ακίνητη.

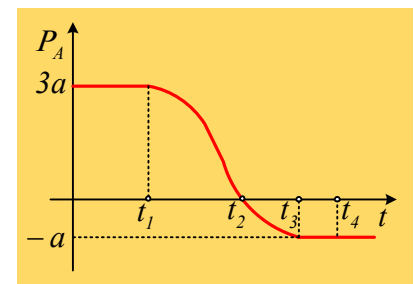
Μια σφαίρα Α μάζας $m_1=0,6\text{kg}$ κινείται (χωρίς να στρέφεται) σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_1=2\text{m/s}$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη ακίνητη σφαίρα Β, ίσης ακτίνας και μάζας $m_2=0,4\text{kg}$.



- Να βρεθούν οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση.
- Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής και της κινητικής ενέργειας κάθε σφαίρας, που οφείλεται στην κρούση.
- Κάποια στιγμή t_1 στη διάρκεια της κρούσης, η ταχύτητα της Α σφαίρας παίρνει την τιμή $u_1=1\text{m/s}$. Να υπολογιστεί η ολική κινητική ενέργεια των δύο σφαιρών τη στιγμή αυτή.
- Ποια η ελάχιστη κινητική ενέργεια των δύο σφαιρών στη διάρκεια της κρούσης;

61) Μελέτη μιας κρούσης, από ένα διάγραμμα

Στο διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή της ορμής ενός σώματος Α που οφείλεται στην μετωπική ελαστική κρούση του με ακίνητο σώμα Β. Η κρούση πραγματοποιείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο.



Α) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

- Η κρούση διαρκεί χρονικό διάστημα $\Delta t=t_2-t_1$.
- Την χρονική στιγμή t_4 το σώμα Β δεν δέχεται δύναμη από το Α σώμα.
- Το σώμα Β έχει μεγαλύτερη μάζα από το σώμα Α.

iv) Την χρονική στιγμή t_2 το σώμα B έχει ορμή $+3\alpha$.

v) Μετά την κρούση το σώμα B έχει ορμή μεγαλύτερη από την αρχική ορμή του σώματος A.

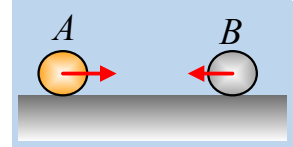
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

B) Να γίνει ένα ποιοτικό διάγραμμα της ορμής του σώματος B σε συνάρτηση με το χρόνο.

62) Μεταβολή Ορμής και Κινητικής ενέργειας.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινούνται μεταφορικά, χωρίς τριβές, δύο μικρές σφαίρες A και B με μάζες m και $3m$ και κινητικές ενέργειες $K_A=4K$ και $K_B=3K$ αντίστοιχα.

Η κρούση των δύο σφαιρών είναι κεντρική και ελαστική.



i) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της A σφαίρας που οφείλεται στην κρούση είναι ίση:

$$\alpha) \Delta K_A = \frac{7}{4}K, \quad \beta) \Delta K_A = \frac{9}{4}K, \quad \gamma) \Delta K_A = \frac{11}{4}K, \quad \delta) \Delta K_A = \frac{21}{4}K.$$

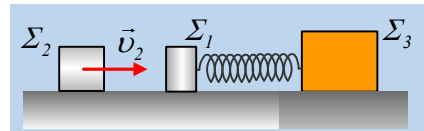
ii) Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, η αντίστοιχη μεταβολή της ορμής της A σφαίρας, έχει τιμή:

$$\alpha) \Delta P_A = -2,5\sqrt{2mK}, \quad \beta) \Delta P_A = -4,5\sqrt{2mK}, \quad \gamma) \Delta P_A = -5,5\sqrt{2mK}, \quad \delta) \Delta P_A = -7\sqrt{2mK}$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

63) Θα υπάρξει ολίσθηση μετά την κρούση;

Ένα σώμα Σ_1 μάζας $m_1=1\text{kg}$ εκτελεί ΑΑΤ σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με πλάτος $0,4\text{m}$, στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε ακίνητο σώμα Σ_3 ,



μάζας $M=15\text{kg}$. Το Σ_3 ισορροπεί σε πιο τραχύ οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή οριακής στατικής τριβής $\mu_s=0,4$. Το σώμα Σ_2 , μάζας $m_2=0,5\text{kg}$, κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα $v_2=4,5\text{m/s}$, όπως στο σχήμα και σε μια στιγμή $t_0=0$, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Σ_1 , με αποτέλεσμα αμέσως μετά την κρούση, να κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $v_2'=1,5\text{m/s}$.

i) Να βρεθούν, για το χρονικό διάστημα πριν την κρούση, η μέγιστη ταχύτητα (κατά μέτρο) ταλάντωσης του Σ_1 και το μέγιστο μέτρο της στατικής τριβής που ασκείται στο Σ_3 .

ii) Ποια η ταχύτητα του Σ_1 αμέσως μετά την κρούση;

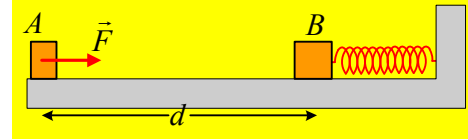
iii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής κάθε σώματος η οποία οφείλεται στην κρούση.

iv) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε σώματος, τη στιγμή που η στατική τριβή που ασκείται στο σώμα Σ_3 έχει μέτρο $T_s=45\text{N}$.

v) Να εξετάσετε αν θα ολισθήσει το σώμα Σ_3 κατά τη διάρκεια της νέας ταλάντωσης που θα πραγματοποιήσει το σώμα Σ_1 μετά την κρούση.

64) Μια κρούση και οι τριβές.

Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα A και B με μάζες $m=1\text{kg}$ και $M=3\text{kg}$ αντίστοιχα, τα οποία απέχουν απόσταση $d=4,75\text{m}$. Το B είναι δεμένο στο άκρο ιδανικού οριζώντιου ελατηρίου σταθεράς $k=240\text{N/m}$,

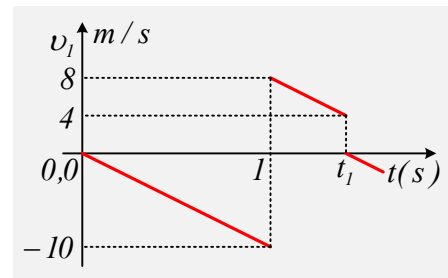


το οποίο έχει το φυσικό μήκος του. Σε μια στιγμή, ασκούμε στο A σώμα μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=10\text{N}$, με κατεύθυνση προς το σώμα B, για χρονικό διάστημα 2s (η δύναμη παύει στη συνέχεια), οπότε το σώμα αποκτά ταχύτητα $v=4\text{m/s}$. Τα δυο σώματα συγκρούονται μετά από λίγο μετωπικά, με αποτέλεσμα να προκληθεί συσπίρωση του ελατηρίου ίση με $0,05\text{m}$, μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του B σώματος. Αν τα σώματα εμφανίζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής με το οριζόντιο επίπεδο, ενώ ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής είναι ίσος με τον συντελεστή τριβής ολίσθησης και $g=10\text{m/s}^2$, να βρεθούν:

- Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του επιπέδου.
- Η ταχύτητα του σώματος A, ελάχιστα πριν την κρούση.
- Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος A, που μεταφέρεται στο B σώμα κατά την κρούση. Είναι η παραπάνω κρούση ελαστική ή όχι;
- Η τελική απόσταση μεταξύ των σωμάτων, όταν σταματήσει η κίνησή τους.

65) Μελέτη δύο κρούσεων, από ένα διάγραμμα.

Μια σφαίρα A μάζας $m_1=0,4\text{kg}$, αφήνεται από κάποιο ύψος h να πέσει ελεύθερα. Μετά την κρούση με το έδαφος, ανακλάται ενώ τη στιγμή t_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα B μάζας $m_2=0,2\text{kg}$. Στο διάγραμμα δίνεται η ταχύτητα της A σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου η διάρκεια των κρούσεων είναι αμελητέα.

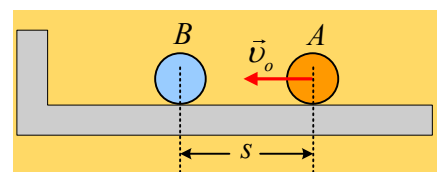


- Να υπολογιστεί το αρχικό ύψος h από το οποίο αφέθηκε η A σφαίρα να κινηθεί, καθώς και το ύψος από το έδαφος που έγινε η κρούση των δύο σφαιρών.
- Η κρούση της A σφαίρας με το έδαφος είναι ή όχι ελαστική; Αν όχι, να υπολογίσετε την απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση.
- Να βρεθούν οι ταχύτητες της B σφαίρας, ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά, την κρούση των δύο σφαιρών.
- Να υπολογιστεί, για κάθε κρούση, η μεταβολή της ορμής της A σφαίρας.

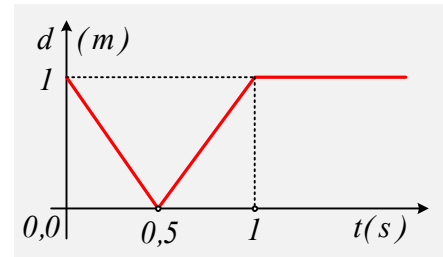
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

66) Δύο ελαστικές κρούσεις και ένα διάγραμμα.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο και μπροστά από ένα κατακόρυφο τοίχο ηρεμούν δυο μικρές σφαίρες A και B απέχοντας μεταξύ τους κατά s . Σε μια στιγμή $t=0$, η A μπάλα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα v_0 με κατεύθυνση προς την σφαίρα B, με την οποία συγκρούεται κεντρικά και



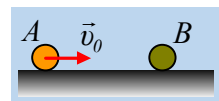
ελαστικά. Στη συνέχεια η σφαίρα B κινούμενη κάθετα προς τον τοίχο, συγκρούεται ελαστικά μαζί του. Η γραφική παράσταση της απόστασης των δύο σφαιρών, σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι δυο σφαίρες μετακινούνται χωρίς να περιστρέφονται.



- i) Ποια η αρχική ταχύτητα v_0 της A σφαίρας;
- ii) Μετά τη χρονική στιγμή $t_2=1s$, η απόσταση των δύο σφαιρών παραμένει σταθερή με βάση το διάγραμμα. Πώς μπορεί να συμβαίνει αυτό;
- iii) Αν η A σφαίρα έχει μάζα $m_1=0,1kg$, να βρεθεί η μάζα της B σφαίρας.
- iv) Πόσο απέχει κάθε σφαίρα από τον τοίχο τη στιγμή $t_3=2s$;

67) Αποστάσεις σε μια ελαστική κρούση.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σφαίρες με ίσες ακτίνες, σε απόσταση d_1 . Σε μια στιγμή κτυπώντας την A σφαίρα, της προσδίδουμε μια ταχύτητα v_0 , με αποτέλεσμα τη στιγμή $t_1=1s$ να συγκρουσθεί κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα B.



- i) Τη χρονική στιγμή $t_2=2s$, η απόσταση των σφαιρών είναι:

$$\alpha) d < d_1, \quad \beta) d = d_1, \quad \gamma) d > d_1.$$

- ii) Αν μέχρι τη στιγμή t_2 η B σφαίρα μετατοπίζεται κατά $x_2=1,5d_1$, τότε η σχέση μεταξύ των μαζών των δύο σφαιρών είναι:

$$\alpha) m_1 = 1,5 m_2, \quad \beta) m_1 = 2m_2, \quad \gamma) m_1 = 3 m_2.$$

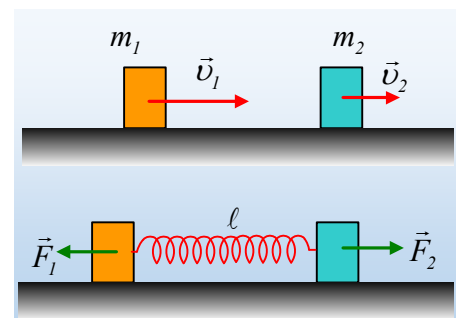
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

68) Μια πλάγια κρούση και το μήκος διαδρομής.

Πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και μπροστά από κατακόρυφο ανένδοτο τοίχο δίνονται δύο σημεία A και B των οποίων οι αποστάσεις από τον τοίχο είναι 2,75 m και 4 m αντίστοιχα. Η απόσταση AB είναι 10 m. Από το σημείο A εκσφενδονίζεται μικρή ελαστική σφαίρα προς τον τοίχο και μετά από ελαστική κρούση με αυτόν, διέρχεται από το σημείο B. Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής της σφαίρας από το A στο B.

69) Οι μετατοπίσεις σε μια ελαστική κρούση και το cm.

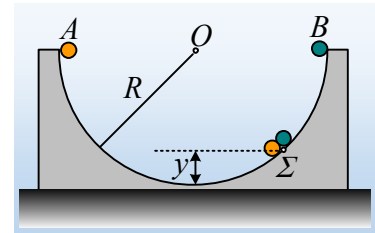
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση δύο σώματα με μάζες $m_1=2kg$, $m_2=3kg$ και ταχύτητες $v_1=10m/s$ και $v_2=5m/s$. Σε μια στιγμή συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά. Θεωρούμε ότι η ελαστική αυτή κρούση, προσομοιάζεται με την αλληλεπίδραση των δύο σωμάτων, μέσω ενός ελατηρίου, σταθεράς $k=3.000N/m$ και φυσικού μήκους $l_0=1m$, όπου το ελατήριο αυτό είναι προσαρμοσμένο στο πίσω μέρος του σώματος m_2 , πάνω στο άλλο άκρο του οποίου προσπίπτει το σώμα m_1 .



Να υπολογιστούν οι μετατοπίσεις των δύο σωμάτων στη διάρκεια της κρούσης.

70) Ελαστική κρούση δύο σφαιρών.

Δύο μικρές σφαίρες Α και Β με ίσες ακτίνες, συγκρατούνται όπως στο σχήμα στις κορυφές ενός λείου ημικυκλικού οδηγού. Σε μια στιγμή αφήνουμε την Α να πέσει, κινούμενη κατά μήκος του οδηγού σε κατακόρυφο επίπεδο. Μετά από λίγο αφήνουμε να κινηθεί και την σφαίρα Β. Οι δυο σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά στο σημείο Σ, η κατακόρυφη απόσταση του οποίου, από το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς είναι $y=0,25R$. Αμέσως μετά την κρούση η ταχύτητα της Β σφαίρας είναι μηδενική.



i) Η κίνηση των σφαιρών είναι:

α) μεταφορική, β) στροφική, γ) σύνθετη.

ii) Για τις πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 των υλικών των σφαιρών Α και Β αντίστοιχα, ισχύει:

$$\alpha) \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{3} \quad \beta) \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1, \quad \gamma) \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{1}$$

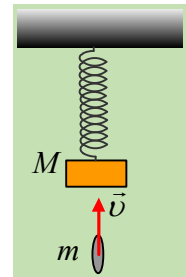
iii) Μετά την κρούση, η Α σφαίρα θα φτάσει μέχρι:

- α) Την θέση που αφέθηκε να κινηθεί.
 β) Πάνω από τη θέση Σ σε ύψος $3(R-y)$.
 γ) Πάνω από τη θέση Σ σε ύψος $3R$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

71) Μια πλαστική κρούση και η ενέργεια της ταλάντωσης.

Μια ξύλινη πλάκα μάζας Μ ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου. Ένα βλήμα μάζας m κινείται κατακόρυφα και σφηνώνεται στην πλάκα. Η κινητική ενέργεια του βλήματος ελάχιστα πριν την κρούση είναι K_0 .



i) Αν η απώλεια της κινητικής ενέργειας που οφείλεται στην κρούση είναι ΔK , ισχύει:

$$\alpha) \Delta K < K_0 \frac{M}{M+2m}, \quad \beta) \Delta K = K_0 \frac{M}{M+2m}, \quad \gamma) \Delta K > K_0 \frac{M}{M+2m}.$$

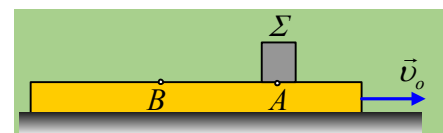
ii) Αν E_τ η ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση, ισχύει:

$$\alpha) E_\tau < K_0 \frac{m}{M+m}, \quad \beta) E_\tau = K_0 \frac{m}{M+m}, \quad \gamma) E_\tau > K_0 \frac{m}{M+m}.$$

Να δικαιολογήστε τις επιλογές σας.

72) Μια άλλη παραλλαγή σε κάτι γνωστό!

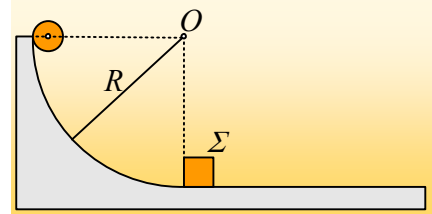
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ολισθαίνει μια σανίδα μάζας $M=8\text{kg}$ με ταχύτητα $v_0=5\text{m/s}$. Σε μια στιγμή αφήνουμε πάνω της, στο σημείο Α, ένα σώμα Σ μάζας $m=2\text{kg}$, χωρίς αρχική ταχύτητα. Παρατηρούμε ότι το Σ γλιστράει και τελικά σταματά την ολίσθησή του πάνω στη σανίδα, στο σημείο Β, όπου $(AB)=2\text{m}$.



- i) Να βρεθεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας που οφείλεται στην ολίσθηση του σώματος Σ .
- ii) Να υπολογιστεί ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος Σ και της σανίδας.
- iii) Η σανίδα και το σώμα Σ αλληλοεπιδρούν εξαιτίας των τριβών που εμφανίζονται. Να υπολογιστούν τα έργα που παράγουν οι τριβές σε κάθε σώμα χωριστά.

73) Μια ελαστική κρούση δύο στερεών.

Από την κορυφή ενός κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου, ακτίνας $R=2\text{m}$ αφήνεται να κινηθεί μια σφαίρα μάζας $m_1=1\text{kg}$. Η σφαίρα αρχικά ολισθαίνει για λίγο, ενώ στη συνέχεια κυλιέται και φτάνοντας στη βάση του επιπέδου, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα Σ , σχήματος κύβου, με ακμή $a=2r$, όπου r η ακτίνα της σφαίρας και μάζας $m_2=1\text{kg}$.

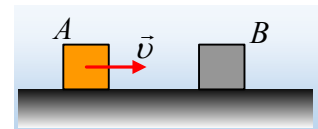


Μετά την κρούση το σώμα Σ κινείται στο οριζόντιο επίπεδο και διανύει απόσταση $x=5\text{m}$, μέχρι να σταματήσει εξαιτίας της τριβής. Δίνεται ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος Σ και του επιπέδου $\mu=0,25$, $g=10\text{m/s}^2$, ενώ στη διάρκεια της κρούσης δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ σφαίρας-κύβου. Εξάλλου η ροπή αδράνειας της σφαίρας είναι ίση με $I=2/5 mr^2$.

- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του Σ αμέσως μετά την κρούση.
- ii) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια της σφαίρας, ελάχιστα πριν την κρούση.
- iii) Να υπολογιστεί το ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας της σφαίρας, το οποίο μετατρέπεται σε θερμική, κατά τη διάρκεια της ολίσθησής της στο τεταρτοκύκλιο. Θεωρείστε μηδενική τη δυναμική της ενέργεια, ελάχιστα πριν την κρούση και ότι $r \ll R$.
- iv) Να εξετάσετε αν θα υπάρξει δεύτερη κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων.

74) Η απόσταση δύο σωμάτων μετά την κρούση.

Ένα σώμα A, μάζας $m_1=1\text{kg}$, κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο σώμα B που ήταν ακίνητο. Ελάχιστα πριν την κρούση το σώμα A έχει ταχύτητα $v_1=4\text{m/s}$, ενώ κατά την κρούση το 75% της κινητικής του ενέργειας, μεταφέρεται στο B σώμα.

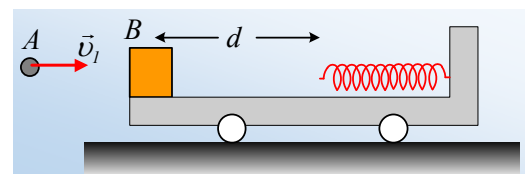


- i) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής του σώματος A στη διάρκεια της κρούσης.
- ii) Πόση είναι η μάζα του B σώματος;
- iii) Αν τα δυο σώματα παρουσιάζουν με το επίπεδο τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$, να γίνει η γραφική παράσταση της μεταξύ τους απόστασης, σε συνάρτηση με το χρόνο, μετά την κρούση.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

75) Μια παραλλαγή σε μια γνωστή περίπτωση.

Το αμαξίδιο του διπλανού σχήματος μάζας $M=1\text{kg}$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, έχοντας πάνω του το σώμα B μάζας $m_2=0,95\text{kg}$, απέχοντας κατά $d=0,5\text{m}$ από το άκρο ενός ιδανικού

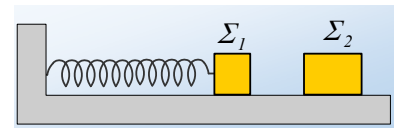


ελατηρίου σταθεράς $k=200\text{N/m}$ και μήκους $0,4\text{m}$. Ένα βλήμα Α μάζας $m_1=50\text{g}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_1=40\text{m/s}$ κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και σφηνώνεται στο σώμα Β, τη στιγμή $t_0=0$. Αν δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ συσσωματώματος και αμαξιδίου, να βρεθούν:

- Η ταχύτητα του συσσωματώματος Α-Β αμέσως μετά την κρούση.
- Το ελάχιστο μήκος που θα αποκτήσει κάποια στιγμή t_1 το ελατήριο.
- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου που ασκείται στο συσσωμάτωμα, από τη στιγμή t_0 έως τη στιγμή t_1 .
- Κάποια επόμενη στιγμή t_2 το ελατήριο αποκτά ξανά το φυσικό μήκος του. Ποια ταχύτητα θα έχει το αμαξίδιο τη στιγμή αυτή;
- Πόσο χρόνο μετά τη στιγμή t_2 το συσσωμάτωμα θα εγκαταλείψει το αμαξίδιο;

76) Μια ελαστική κρούση και δύο ταλαντώσεις.

Ένα σώμα Σ_1 ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, απέχοντας κατά d από ένα δεύτερο σώμα Σ_2 , διπλάσιας μάζας, όπως στο σχήμα. Εκτρέπουμε το σώμα Σ_1 προς τα αριστερά κατά $2d$, συμπιέζοντας το ελατήριο και στη συνέχεια το αφήνουμε να ταλαντωθεί. Η κρούση των σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική.



i) Μετά την κρούση το σώμα Σ_1 :

- θα αποκτήσει μηδενική ταχύτητα,
- θα κινηθεί προς τα δεξιά,
- θα κινηθεί προς τα αριστερά.

ii) Το σώμα Σ_2 θα αποκτήσει κινητική ενέργεια:

$$\alpha) K_2 < \frac{1}{2} kd^2, \quad \beta) K_2 = \frac{1}{2} kd^2, \quad \gamma) K_2 > \frac{1}{2} kd^2.$$

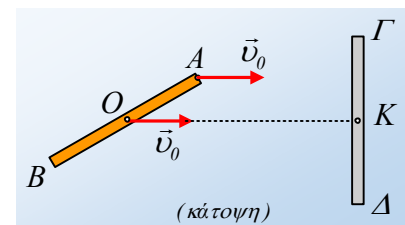
iii) Για το νέο πλάτος ταλάντωσης του Σ_1 μετά την κρούση θα ισχύει:

$$\alpha) A_1 < d, \quad \beta) A_1 = d, \quad \gamma) A_1 > d.$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

77) Δυο ράβδοι συγκρούονται ελαστικά.

Πάνω σε μια παγωμένη λίμνη ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα $v_0=v_A=v_B=3,5\text{m/s}$ μια οριζόντια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους $\ell=1\text{m}$, όπου Ο το μέσον της. Μια δεύτερη όμοια ράβδος ΓΔ ηρεμεί όπως στο σχήμα, όπου η διεύθυνση της ταχύτητας του σημείου Ο, είναι κάθετη στην ΓΔ, στο μέσον της Κ. Οι δυο ράβδοι συγκρούονται ελαστικά.



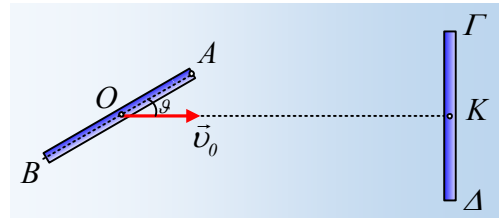
- Να βρεθεί η ταχύτητα του άκρου Β της πρώτης ράβδου, πριν την κρούση.
- Να εξηγήσετε γιατί μετά την κρούση καμιά ράβδος δεν θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση.
- Ποια ράβδος θα αποκτήσει μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- iv) Αν το μέσον K της ράβδου ΓΔ αποκτήσει, αμέσως μετά την κρούση, ταχύτητα μέτρου $v_2=2\text{m/s}$, να υπολογίσετε την τελική ταχύτητα του μέσου O και τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου AB.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I = \frac{1}{12} m\ell^2$.

78) Δυο ράβδοι συγκρούονται ελαστικά. Για καθηγητές μόνο!

Πάνω σε μια παγωμένη λίμνη ολισθαίνει εκτελώντας μόνο μεταφορική κίνηση, μια οριζόντια ομογενής ράβδος AB μήκους $\ell=1\text{m}$ και μάζας m , με σταθερή ταχύτητα $v_0=3,5\text{m/s}$, η οποία σχηματίζει γωνία $\theta=30^\circ$ με τη ράβδο. Μια δεύτερη όμοια ράβδος ΓΔ ηρεμεί όπως στο σχήμα, όπου η διεύθυνση της ταχύτητας του μέσου O της AB, είναι κάθετη στην ΓΔ, στο μέσον της K.

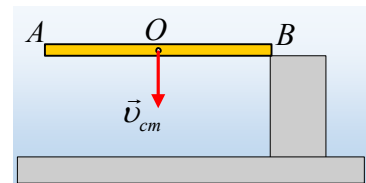


Να βρεθούν η ταχύτητα και η γωνιακή ταχύτητα κάθε ράβδου, μετά την ελαστική μεταξύ τους κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I = \frac{1}{12} m\ell^2$.

79) Μια ράβδος συγκρούεται με ένα σκαλοπάτι.

Μια ομογενής ράβδος AB μήκους ℓ και μάζας M πέφτει ελεύθερα και σε μια στιγμή το άκρο της B κτυπά στην πάνω πλευρά ενός λείου σκαλοπατιού. Ελάχιστα πριν την κρούση, το κέντρο μάζας O της ράβδου έχει κατακόρυφη ταχύτητα $v_{cm}=2\text{m/s}$, ενώ το άκρο A έχει μηδενική ταχύτητα.

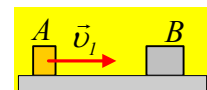


- i) Ποια η ταχύτητα του άκρου B της ράβδου ελάχιστα πριν την κρούση;
- ii) Κατά τη διάρκεια της κρούσης της ράβδου με το σκαλοπάτι:
 - α) Η δύναμη που ασκήθηκε στη ράβδο από το σκαλοπάτι, είναι κατακόρυφη.
 - β) Η ορμή της ράβδου παραμένει σταθερή.
 - γ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή.
 - δ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή ως προς κατάλληλα επιλεγμένο σημείο.
- iii) Αν το άκρο B, αμέσως μετά την κρούση, έχει κατακόρυφη ταχύτητα με φορά προς τα πάνω μέτρου 1m/s , ενώ το άκρο A κατακόρυφη ταχύτητα με φορά προς τα κάτω μέτρου 3m/s , να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική ή όχι.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I = \frac{1}{12} M\ell^2$.

80) Ποσοστά μεταφοράς κινητικής ενέργειας.

1. Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται ένα σώμα A μάζας m με ταχύτητα v_1 και συγκρούεται με ακίνητο σώμα B μάζας $M > m$. Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και κατά την κρούση μεταφέρεται στο σώμα B το 75% της κινητικής ενέργειας του A



σώματος.

i) Για τη μάζα του B σώματος θα ισχύει:

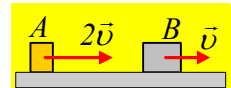
α) $M=2m$, β) $M=3m$, γ) $M=4m$, δ) $M=5m$

ii) Αν $M=4m$, τότε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του A σώματος που μεταφέρεται στο ακίνητο σώμα B θα είναι:

α) 56%, β) 64%, γ) 75%, δ) 84%.

iii) Τι τιμή πρέπει να πάρει η μάζα M του σώματος B, ώστε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που θα μεταφερθεί από το A σώμα, στο B, να είναι το ελάχιστο δυνατόν;

2. Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινούνται στην ίδια ευθεία και προς την ίδια κατεύθυνση δυο σώματα A και B με μάζες m και M και ταχύτητες $2v$ και v αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Τα σώματα συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά.



i) Η κινητική ενέργεια του A σώματος, αυξάνεται, μειώνεται ή παραμένει σταθερή κατά την κρούση;

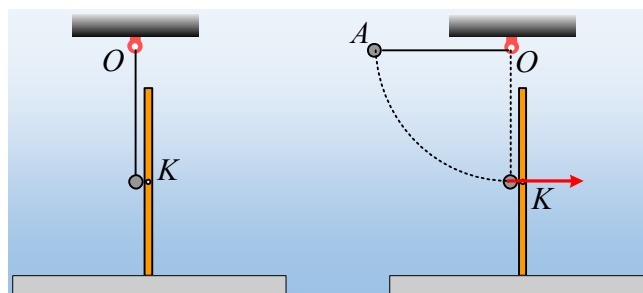
ii) Αν $m=M$, ποιο ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του A σώματος μεταφέρεται στο B;

iii) Αν το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του A σώματος που μεταφέρεται στο B σώμα είναι 96%, τότε μεταξύ των μαζών ισχύει:

α) $M=2m$, β) $M=3m$ γ) $M=4m$.

81) Η ελαστική κρούση μιας σφαίρας με ράβδο.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί, σε όρθια θέση, μια ομογενής ράβδος, ενώ μια σφαίρα, μάζας M , βρίσκεται σε επαφή μαζί της, ενώ κρέμεται στο άκρο νήματος από σταθερό σημείο O. Εκτρέπουμε τη σφαίρα φέρνοντάς την στη θέση A με το νήμα οριζόντιο, όπως στο σχήμα και την αφήνουμε να κινηθεί. Μετά την ελαστική της κρούση με τη ράβδο, στο μέσον της K, η σφαίρα μένει ακίνητη.



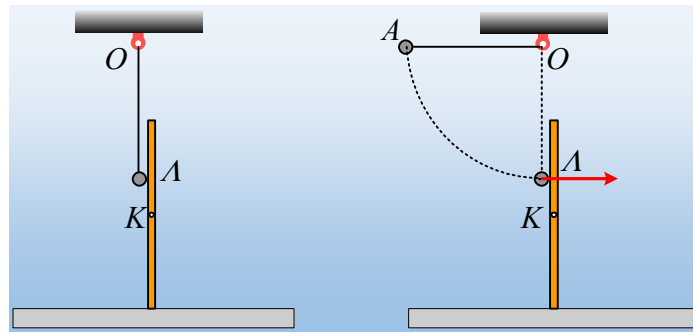
i) Για την μάζα m της ράβδου ισχύει:

α) $m < M$, β) $m=M$, γ) $m > M$.

ii) Να εξετάσετε αν η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή, ως προς:

α) Το σημείο O, β) Το σημείο K.

iii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά προηγουμένως έχουμε ανεβάσει λίγο το σημείο O, με αποτέλεσμα τώρα η σφαίρα να κτυπήσει τη σανίδα στο σημείο Λ, όπως στο σχήμα.



Η ταχύτητα της σφαίρας μετά την ελαστική κρούση της με τη σανίδα:

- α) θα είναι μηδενική, β) θα είναι διάφορη του μηδενός.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

82) Μερικές «αντιφάσεις» στην ελαστική κρούση.

Κατά την μετωπική ελαστική κρούση έχουμε καταλήξει στις σχέσεις:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{και} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Για τις ταχύτητες των δύο υλικών σημείων που συγκρούονται ελαστικά και που το δεύτερο σώμα είναι αρχικά ακίνητο.

Οι τελικές ταχύτητες συνεπώς των δύο σωμάτων, εξαρτώνται καθαρά από τις σχέσεις των μαζών τους.

Αλλά τότε ανάλογα με την σχέση των δύο μαζών, θα έχουμε διαφορετικά «πρακτικά» αποτελέσματα και μερικά από αυτά μπορούν να δημιουργούν «εκπλήξεις»!

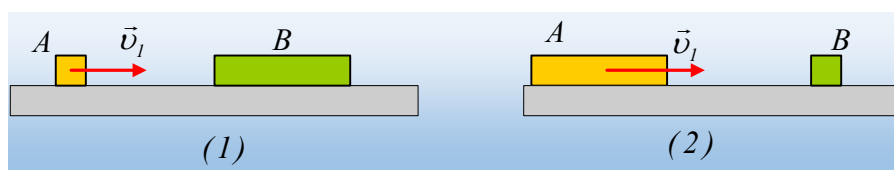
Ας ξεκινήσουμε από μια πολύ συχνή περίπτωση:

Παράδειγμα 1^ο:

Αν υλικό σημείο A κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_1=4\text{m/s}$ και συγκρούεται με δεύτερο ακίνητο υλικό σημείο B.

Να βρεθούν μετά την κρούση:

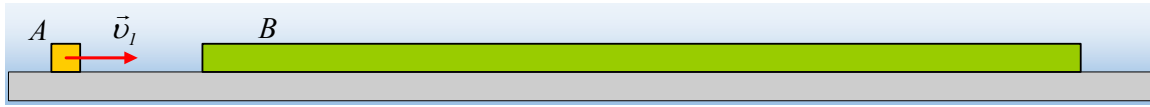
- i) Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων.
- ii) Η ορμή κάθε σώματος
- iii) Η κινητική του ενέργεια



Στις δυο περιπτώσεις που εμφανίζονται στο παραπάνω σχήμα, όπου στην πρώτη $m_1=m$ και $m_2=4m$, ενώ στη δεύτερη $m_1=4m$ και $m_2=m$.

Παράδειγμα 2^ο:

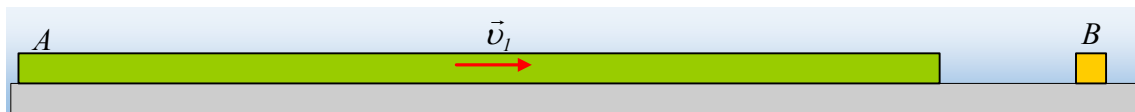
Αν το παραπάνω σώμα A έχει μάζα $m_1 = m$ ενώ το B $m_2 = 999m$ να βρεθούν:



- i) Η μεταβολή της ορμής κάθε σώματος.
- ii) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του A σώματος.

Παράδειγμα 3^ο:

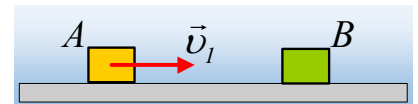
Αν το παραπάνω σώμα A έχει μάζα $m_1 = 999m$ ενώ το B $m_2 = m$ να βρεθούν:



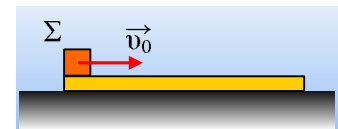
- i) Η μεταβολή της ορμής κάθε σώματος.
- ii) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του A σώματος.

Παράδειγμα 4^ο:

Και αν πάμε στην ενδιάμεση κατάσταση, όπου τα σώματα έχουν ίσες μάζες;

**83) Ενέργειες και έργα τριβής.**

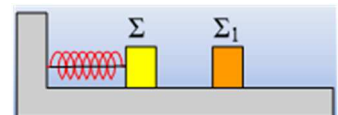
Μια σανίδα μάζας $M=4\text{kg}$ και μήκους $\ell=2\text{m}$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή εκτοξεύουμε πάνω της, από το ένα της άκρο, ένα σώμα Σ μάζας $m=1\text{kg}$ με αρχική ταχύτητα $v_0=5\text{m/s}$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος Σ και της σανίδας είναι $\mu=0,8$ και $g=10\text{m/s}^2$.



- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα της σανίδας τη στιγμή που θα πάψει να ολισθαίνει πάνω της το σώμα Σ .
- ii) Σε πόσο χρονικό διάστημα t_1 θα συμβεί το παραπάνω;
- iii) Να υπολογιστούν τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε σώμα στο χρονικό διάστημα t_1 .
- iv) Να βρεθεί η αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος, καθώς και η αύξηση της εσωτερικής ενέργειας της σανίδας.

84) Ποια η θέση της κρούσης;

Το σώμα Σ είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, το οποίο έχει συμπιέσει κατά d , με τη βοήθεια νήματος, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή $t_0=0$, κόβουμε το νήμα, οπότε το σώμα Σ κινούμενο προς τα δεξιά συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ένα δεύτερο σώμα Σ_1 , το οποίο ήταν αρχικά ακίνητο. Μετά την κρούση το σώμα Σ παραμένει ακίνητο στο σημείο της κρούσης. Το επίπεδο είναι λείο και τα σώματα θεωρούνται υλικά σημεία.



Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

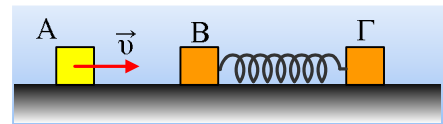
i) Τα δυο σώματα έχουν ίσες μάζες.

ii) Η κρούση έγινε τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{4}$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος Σ .

iii) Η κινητική ενέργεια που αποκτά το σώμα Σ_1 είναι ίση με $\frac{m\pi^2 d^2}{8t_1^2}$, όπου m η μάζα του.

85) Μια κρούση και δυο «κρούσεις»...

Τα σώματα A, B και Γ του σχήματος έχουν ίσες μάζες και ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ τα σώματα B και Γ είναι δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου. Κτυπώντας στιγμιαία το σώμα A, του προσδίδουμε ταχύτητα v πάνω στον άξονα του ελατηρίου, οπότε μετά από λίγο συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το B.



Να εξετάσετε την ορθότητα ή μη των προτάσεων, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

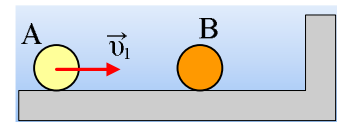
i) Μετά την κρούση το σώμα A θα παραμείνει ακίνητο.

ii) Η μέγιστη δυναμική ενέργεια που θα αποκτήσει το ελατήριο, θα είναι ίση με το 75% της αρχικής κινητικής ενέργειας του A σώματος.

iii) Κάποια στιγμή του σώμα Γ, θα αποκτήσει το 100% της αρχικής κινητικής ενέργειας του A σώματος.

86) Τρεις ερωτήσεις στις ελαστικές κρούσεις.

Η σφαίρα A κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v_1 , χωρίς να στρέφεται και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα B, ίσης ακτίνας, όπως στο σχήμα. Η σφαίρα B μετά την κρούση μπορεί να συγκρουστεί ελαστικά με κατακόρυφο τοίχο.



Να εξετάσετε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

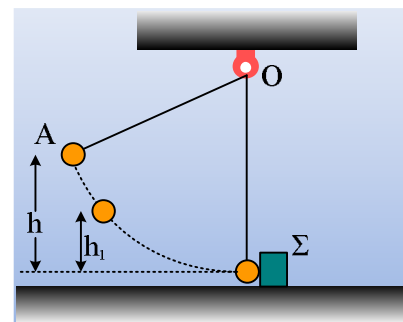
i) Οι δυο σφαίρες μπορεί να ξανασυγκρουστούν πριν προλάβει η B να κτυπήσει στον τοίχο.

ii) Αν οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες θα ξανασυγκρουστούν στην ίδια θέση με την πρώτη κρούση.

iii) Αν $m_2 = 2m_1$ οι σφαίρες δεν θα συγκρουστούν για 2^η φορά.

87) Μια ελαστική κρούση και η στροφορμή.

Μια μικρή σφαίρα μάζας $m=0,1\text{kg}$ ηρεμεί δεμένη στο κάτω άκρο νήματος μήκους $\ell=3\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο O, ενώ εφάπτεται σε ένα σώμα, το οποίο ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Εκτρέπουμε τη σφαίρα φέρνοντάς την στο σημείο A, σε ύψος $h=1,25\text{m}$ και την αφήνουμε να κινηθεί. Μετά την μετωπική και ελαστική κρούση της σφαίρας με το σώμα Σ , η σφαίρα επιστρέφει φτάνοντας σε ύψος $h_1=0,45\text{m}$, ενώ το σώμα Σ διανύει απόσταση $x=2\text{m}$, μέχρι να σταματήσει. Να υπολογιστούν:

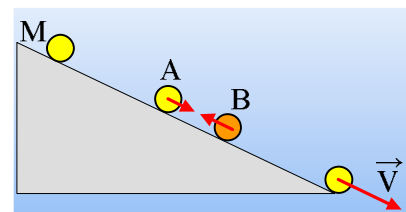


- i) Η μάζα M του σώματος Σ .
- ii) Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας που οφείλεται στην κρούση.
- iii) Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος Σ και του επιπέδου.
- iv) Τη στιγμή που η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος $h_2=0,25\text{m}$ κατά την άνοδό της, να βρεθούν:
 - α) Η στροφορμή της σφαίρας (μέτρο και κατεύθυνση) ως προς το σημείο O , καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της αντίστοιχης στροφορμής.
 - β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

88) Ένα δεύτερο θέμα στις κρούσεις.

Αφήνουμε από ένα σημείο O ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου μια μικρή σφαίρα A να κινηθεί και φτάνει στη βάση του επιπέδου έχοντας ταχύτητα V .



Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, αλλά κάποια στιγμή στη διάρκεια της καθόδου, που η σφαίρα A έχει ταχύτητα v_1 , συγκρούεται κεντρικά και ε-

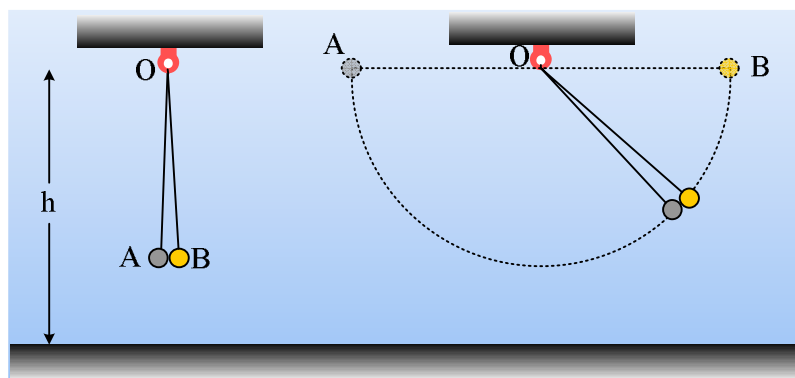
λαστικά με μια δεύτερη σφαίρα B της ίδιας μάζας, η οποία κινείται προς τα πάνω και ελάχιστα πριν την κρούση έχει ταχύτητα μέτρου v_2 . Τελικά η A σφαίρα φτάνει στη βάση του επιπέδου με ταχύτητα ξ ανά V .

- i) Κατά την κρούση η A σφαίρα:
 - α) κέρδισε ενέργεια
 - β) έχασε ενέργεια
 - γ) τίποτα από τα δύο.
- ii) Η B σφαίρα θα φτάσει στη βάση του επιπέδου με ταχύτητα V_2 , όπου:

$$\alpha) V_2 < V \quad \beta) V_2 = V \quad \gamma) V_2 > V$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

89) Δυο σφαίρες που δεν αφέθηκαν ταυτόχρονα.



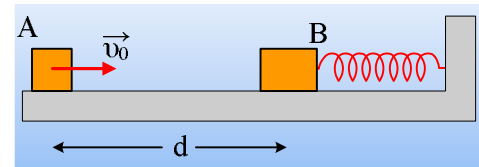
Δυο μικρές μεταλλικές σφαίρες A και B ηρεμούν στα κάτω άκρα δύο ίσων νημάτων με το ίδιο μήκος. Τα νήματα έχουν δεθεί στο ίδιο σημείο O , σε ύψος $h=1,8\text{m}$ από το έδαφος. Εκτρέπουμε τις δυο σφαίρες ώστε τα

νήματα να γίνουν οριζόντια, όπως στο διπλανό σχήμα. Σε μια στιγμή αφήνουμε πρώτα την Α σφαίρα και μετά από λίγο την Β να κινηθούν. Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά σε μια ενδιάμεση θέση. Στη διάρκεια της κρούσης κόβεται το νήμα που συγκρατεί τη σφαίρα Β, η οποία τελικά φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα $v=6\text{m/s}$.

- Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης που ασκήθηκε στην Β σφαίρα από την Α, στη διάρκεια της κρούσης.
- Να εξετάσετε αν η Α σφαίρα θα φτάσει ποτέ στην οριζόντια θέση από την οποία αφέθηκε η Β σφαίρα.
- Επαναλαμβάνουμε το πείραμα αντικαθιστώντας την Β σφαίρα με άλλη ίσης ακτίνας και διπλάσιας μάζας (αλλάζουμε και το νήμα, για να μην κοπεί!!!). Μετά την κεντρική και ελαστική κρούση των δύο σφαιρών, περίπου στην ίδια με την προηγούμενη θέση, οι σφαίρες θα ξαναφτάσουν στις αρχικές θέσεις τους, στην οριζόντια διεύθυνση;

90) Πόσο τελικά θα απέχουν τα δυο σώματα;

Σε ένα οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα Α και Β με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$ αντίστοιχα απέχοντας κατά $d=1\text{m}$. Το Β σώμα είναι δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς $k=40\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του. Ο συντελεστής τριβής των σωμάτων με το επίπεδο είναι $\mu=0,8$, ενώ $g=10\text{m/s}^2$. Σε μια στιγμή εκτοξεύεται το σώμα Α με αρχική ταχύτητα $v_0=5\text{m/s}$, με κατεύθυνση προς το σώμα Β και κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα.

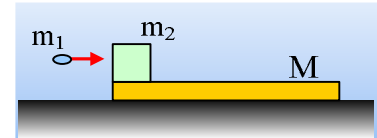


- Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος Α ελάχιστα πριν την κρούση.
- Ποιες οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την μετωπική ελαστική τους κρούση;
- Ποια θα είναι τελικά η απόσταση των δύο σωμάτων όταν ακινητοποιηθούν;
- Τι ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του Α σώματος μετατρέπεται συνολικά σε θερμική ενέργεια εξαιτίας της τριβής;

Ασκήσεις 2009-12

91) Ένας κύβος πάνω σε σανίδα.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια μακριά σανίδα, πάνω στην οποία βρίσκεται ένας ξύλινος κύβος. Ένα βλήμα κινούμενο οριζόντια σφηνώνεται στον κύβο.



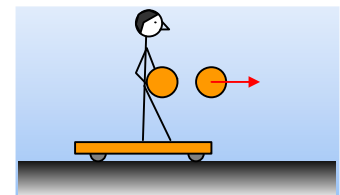
- i) Αν δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ κύβου και σανίδας, ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.
 - α) Κατά την κρούση μεταξύ βλήματος και κύβου, η ορμή του βλήματος διατηρείται.
 - β) Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα θα κινηθεί με σταθερή ταχύτητα πάνω στη σανίδα.
 - γ) Μετά την κρούση, η σανίδα θα κινηθεί προς τα δεξιά.
 - δ) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.
- ii) Αν εμφανίζεται τριβή μεταξύ κύβου και σανίδας, παρατηρούμε ότι η σανίδα κινείται προς τα δεξιά, ενώ μετά από λίγο σταματά να γλιστρά πάνω της ο κύβος. Η διάρκεια της κρούσης βλήματος-κύβου είναι αμελητέα, τότε:
 - α) Κατά την κρούση μεταξύ βλήματος και κύβου, η ορμή του συστήματος βλήμα-κύβος διατηρείται.
 - β) Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα θα κινηθεί με σταθερή ταχύτητα πάνω στη σανίδα.
 - γ) Μετά την κρούση, η σανίδα θα κινηθεί προς τα δεξιά λόγω της ορμής του κύβου.
 - δ) Η ορμή του συστήματος βλήμα-κύβος-σανίδα διατηρείται σταθερή.
 - ε) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της σανίδας παραμένει σταθερός, μέχρι να σταματήσει πάνω της ο κύβος.
 - στ) Τελικά κάποια στιγμή θα σταματήσει η κίνηση του κύβου πάνω στη σανίδα και από εκεί και πέρα, το σύστημα θα κινηθεί με σταθερή ταχύτητα.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

92) Πότε αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα;

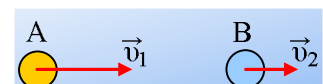
Ένας άνθρωπος στέκεται πάνω σε ένα ακίνητο πατίνι, κρατώντας στα χέρια του δυο μπάλες. Πότε θα αποκτήσει μεγαλύτερη ταχύτητα, όταν:

- i) Εκτοξεύει ταυτόχρονα και τις δυο μπάλες προς την ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα v ως προς τον εαυτόν του.
- ii) Εκτοξεύει πρώτα τη μια και μετά την άλλη, επίσης προς την ίδια κατεύθυνση, με ταχύτητα v ως προς τον εαυτόν του.



93) Ελαστική κρούση και ωθήσεις

Έστω μια ελαστική μετωπική κρούση δύο σφαιρών Α και Β, θεωρουμένων



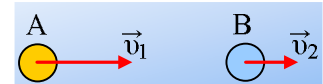
υλικών σημείων, οι οποίες κινούνται στην ίδια ευθεία, όπως στο σχήμα.

Να αποδειχθεί ότι η ώθηση της δύναμης, που ασκείται στην σφαίρα Α, μέχρι τη στιγμή της μέγιστης παραμόρφωσης, είναι ίση με την ώθησή της, από κει και πέρα.

94) Κάτι περίεργο συμβαίνει στην ελαστική κρούση!!!

Μόνο για Καθηγητές

Έστω μια μετωπική κρούση δύο σφαιρών Α και Β, οι οποίες κινούνται στην ίδια ευθεία, όπως στο σχήμα:



Να βρεθεί η ταχύτητα της σφαίρας Α μετά την κρούση, με δεδομένο ότι η ώθηση της δύναμης που ασκείται πάνω της μέχρι τη στιγμή της μέγιστης παραμόρφωσης, είναι ίση με την ώθησή της, από κει και πέρα.

95) Πλάγια ελαστική κρούση

Ας δούμε ξανά το θέμα Δ (Δ_1, Δ_2) των πρόσφατων επαναληπτικών εξετάσεων:

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο σφαίρα μάζας $m_1 = m = 1\text{kg}$, κινούμενη με ταχύτητα $v = \frac{4}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}$, συγκρούεται ελαστικά αλλά όχι κεντρικά με δεύτερη όμοια σφαίρα μάζας $m_2 = m$, που είναι αρχικά ακίνητη. Μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν ταχύτητες μέτρων v_1 και $v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{3}}$, αντίστοιχα.

Δ1. Να βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας \vec{U}_2 με το διάνυσμα της ταχύτητας \vec{U}_1 .

Μονάδες 8

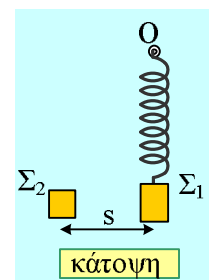
Δ2. Να υπολογίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων v_1 και v_2 .

Μονάδες 4

Η απάντηση που προφανώς αναμένεται, είναι η...

96) Μια πλάγια πλαστική κρούση αλλά μετά τι;

Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{N/m}$ και φυσικού μήκους $\ell_0 = 0,6\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο Ο. Σε απόσταση $s = 0,628\text{m}$ ηρεμεί ένα δεύτερο σώμα Σ_2 , της ίδιας μάζας, όπως στο σχήμα. Τα δύο σώματα θεωρούνται υλικά σημεία αμελητέων διαστάσεων. Μετακινούμε το σώμα Σ_1 συσπειρώνοντας το ελατήριο κατά $0,4\text{m}$ και σε μια στιγμή $t_0 = 0$ το αφήνουμε να ταλαντωθεί, ενώ ταυτόχρονα εκτοξεύουμε οριζόντια με ταχύτητα v_2 το σώμα Σ_2 . Μόλις το σώμα Σ_1 φτάσει στην θέση ισορροπίας του, τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά.



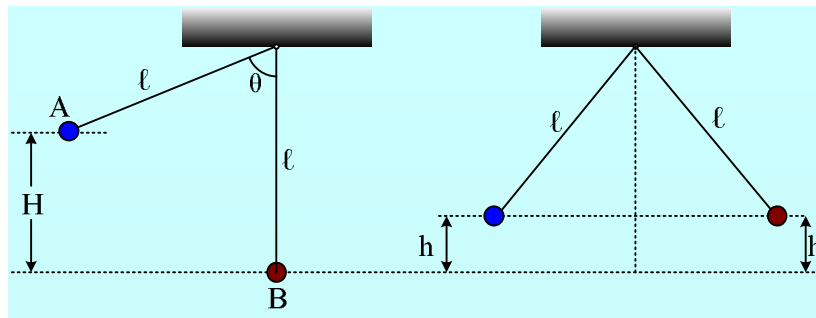
- i) Με ποια ταχύτητα κινήθηκε το σώμα Σ_2 πριν την κρούση;
- ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος Σ αμέσως μετά την κρούση.
- iii) Πόση είναι η απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση;
- iv) Μετά από λίγο το ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια 4J . Για τη θέση αυτή:
 - α) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του συσσωματώματος Σ .
 - β) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του Σ , ως προς κατακόρυφο άξονα που περνά από το

άκρο Ο του ελατηρίου;

γ) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Ο, από τον φορέα της ταχύτητας του συσσωματώματος.

97) Δύο σφαίρες στα άκρα ίσων νημάτων.

Δυο μικρές σφαίρες Α και Β με ίσες ακτίνες και μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, κρέμονται με δύο νήματα ίσου μήκους, από το ίδιο σημείο. Εκτρέπουμε την Α σφαίρα, ώστε το νήμα να σχηματίσει γωνία θ με την κατακόρυφο, ανεβάζοντάς την κατά H και την αφήνουμε να κινηθεί. Μετά την ελαστική και μετωπική μεταξύ τους κρούση, οι σφαίρες φτάνουν ταυτόχρονα στο ίδιο ύψος h , όπως στο σχήμα.



1) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες:

- Μεγαλύτερη μάζα έχει η Β σφαίρα.
- Οι ταχύτητες μετά την κρούση των δύο σφαιρών, είναι αντίθετες.
- Οι δύο σφαίρες έχουν ίσες κατά μέτρο ορμές, αμέσως μετά την κρούση.
- Το μέτρο της ορμής που θα αποκτήσει η Β σφαίρα λόγω κρούσης, είναι μικρότερο από το μέτρο της αρχικής ορμής της σφαίρας Α πριν την κρούση.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

2) Αν $H=4h$, όπου H το αρχικό ύψος από το οποίο αφέθηκε η Α σφαίρα και h το τελικό μέγιστο ύψος στο οποίο θα ανέβουν, τότε:

i) Οι μάζες των δύο σφαιρών ικανοποιούν τη σχέση:

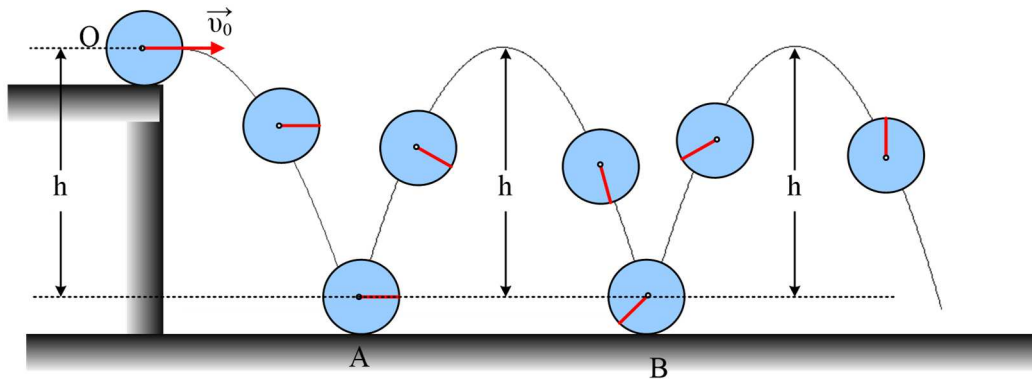
$$\alpha) m_1=m_2 \quad \beta) m_1=2m_2 \quad \gamma) m_2=2m_1 \quad \delta) m_2=3m_1$$

ii) Σε μια στιγμή, στη διάρκεια της κρούσης, το μέτρο της τάσης του νήματος που κρέμεται η Α σφαίρα, γίνεται ίση με το βάρος της. Τότε η Β σφαίρα έχει κινητική ενέργεια:

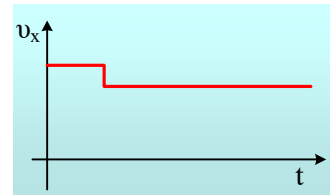
$$\alpha) \frac{1}{3} m_1 gh \quad \beta) \frac{1}{2} m_1 gh \quad \gamma) \frac{2}{3} m_1 gh \quad \delta) m_1 gh$$

98) Μια οριζόντια εκτόξευση σφαίρας.

Από ορισμένο ύψος εκτοξεύουμε οριζόντια μια σφαίρα με αρχική ταχύτητα v_0 και χωρίς γωνιακή ταχύτητα. Στο σχήμα φαίνεται η τροχιά της σφαίρας, αλλά και η σφαίρα σε διάφορες θέσεις. Παρατηρείστε ότι στις θέσεις μετά την πρώτη κρούση, στο σημείο Α, η σφαίρα περιστρέφεται, ενώ μετά από κάθε αναπήδηση, φτάνει στο αρχικό ύψος h .

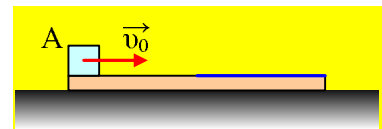


- i) Η κίνηση της σφαίρας μεταξύ της αρχικής θέσης O και της θέσης A είναι:
- α) Μεταφορική β) Στροφοκική
- ii) Μπορείτε να ερμηνεύσετε:
- α) Γιατί η σφαίρα, ενώ αρχικά δεν στρέφεται, μετά την πρώτη κρούση, αποκτά γωνιακή ταχύτητα;
- β) Γιατί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, μεταξύ πρώτης και δεύτερης κρούσης (θέσεις A-B), παραμένει σταθερή;
- iii) Πάρτε τη σφαίρα σε επαφή με το έδαφος (θέση A). Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω της. Ποιο είναι το αποτέλεσμα της δράσης κάθε δύναμης;
- iv) Παίρνοντας τη γραφική παράσταση της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας v_x σε συνάρτηση με το χρόνο, προκύπτει η γραφική παράσταση, του διπλανού σχήματος. Γιατί μειώνεται η ταχύτητα κατά την πρώτη κρούση; Γιατί στις επόμενες κρούσεις δεν συμβαίνει κάτι αντίστοιχο; Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στη θέση B, στη διάρκεια της 2^{ης} κρούσης.
- v) Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας στη διάρκεια της 2^{ης} κρούσης:
- α) Είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω.
- β) Είναι πλάγια με φορά προς τα πάνω.
- γ) Έχει μέτρο $2m\sqrt{2gh}$
- δ) Έχει μέτρο μικρότερο από $2m\sqrt{2gh}$
- Ποιες από τις προτάσεις αυτές είναι σωστές και ποιες όχι.



99) Μια ιδιόμορφη “κρούση”.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια λεπτή και μακριά σανίδα μήκους ℓ και μάζας $M=4\text{kg}$. Ένα σώμα A, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο, μάζας $m=2\text{kg}$, εκτοξεύεται από το ένα άκρο της σανίδας με αρχική ταχύτητα $v_0=10\text{m/s}$. Αν το μισό μήκος της σανίδας είναι λείο, ενώ ο συντελεστής τριβής μεταξύ του A και του υπόλοιπου μισού της σανίδας είναι $\mu=0,4$, ενώ η τελική ταχύτητα του A, τη στιγμή που εγκαταλείπει την σανίδα, είναι $v_1=6\text{m/s}$, να βρεθούν:

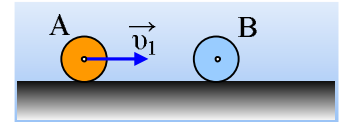


- i) Η ταχύτητα την οποία αποκτά η σανίδα.

- ii) Η επιτάχυνση την οποία απέκτησε η σανίδα, καθώς και το χρονικό διάστημα της επιτάχυνσής της.
 iii) Η μηχανική ενέργεια που μετετράπη σε θερμική εξαιτίας της τριβής.
 iv) Το χρονικό διάστημα που το σώμα A είναι σε επαφή με την σανίδα.
 Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

100) Ενέργεια και ελαστική κρούση.

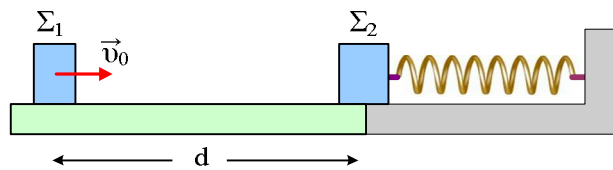
Μια σφαίρα A μάζας $m_1=2\text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_1=10\text{m/s}$ και συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με ακίνητη σφαίρα B μάζας $m_2=3\text{kg}$. Σε μια στιγμή t_1 στη διάρκεια της κρούσης η σφαίρα B έχει ταχύτητα $v_B=6\text{m/s}$. Οι σφαίρες μας έχουν ίσες ακτίνες και θεωρούνται υλικά σημεία.



- i) Για τη στιγμή t_1 :
- Πόση κινητική ενέργεια έχει κάθε σφαίρα;
 - Πόση είναι η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης των δύο σφαιρών;
- ii) Να βρείτε τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των δύο σωμάτων από την στιγμή t_1 μέχρι το τέλος της κρούσης.
- iii) Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λαθεμένες.
- Κατά τη διάρκεια μιας ελαστικής κεντρικής κρούσης η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.
 - Κατά τη διάρκεια μιας ελαστικής κεντρικής κρούσης η κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.
 - Κατά τη διάρκεια μιας ελαστικής κεντρικής κρούσης η ορμή κάθε σφαίρας παραμένει σταθερή.
 - Η παραμόρφωση των σφαιρών είναι ελαστική.
 - Τα έργα της δράσης – αντίδρασης είναι αντίθετα.
 - Οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των δύο σφαιρών κατά τη διάρκεια μιας ελαστικής κεντρικής κρούσης είναι συντηρητικές.

101) Μια κρούση και μια φθίνουσα ταλάντωση.

Ένα σώμα Σ_1 μάζας $m_1=0,5\text{kg}$ εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $v_0=5\text{m/s}$ από απόσταση $d=0,9\text{m}$ προς ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας $m_2=2\text{kg}$, το οποίο ηρεμεί στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=28\text{N/m}$ που έχει το φυσικό του μήκος. Η ταχύτητα v_0 έχει την διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου. Το σώμα Σ_2 βρίσκεται στο όριο δύο επιπέδων, δεξιά του το επίπεδο είναι λείο, ενώ τα σώματα παρουσιάζουν συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,5$ με το επίπεδο στα αριστερά της αρχικής θέσης του Σ_2 .



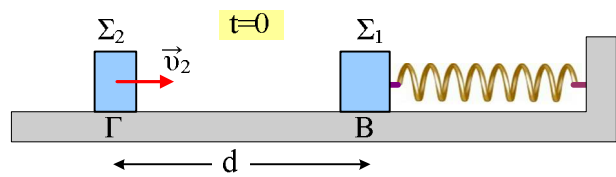
Η ταχύτητα v_0 έχει την διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου. Το σώμα Σ_2 βρίσκεται στο όριο δύο επιπέδων, δεξιά του το επίπεδο είναι λείο, ενώ τα σώματα παρουσιάζουν συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,5$ με το επίπεδο στα αριστερά της αρχικής θέσης του Σ_2 .

- Ποιες οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κεντρική και ελαστική μεταξύ τους κρούση;
- Πόσο θα απέχουν μεταξύ τους τα δυο σώματα, όταν σταματήσουν την κίνησή τους;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

102) Μια κρούση σε ταλάντωση.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα Σ_1 μάζας $m_1=2\text{kg}$ δεμένο στο άκρο οριζώντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=80\text{N/m}$. Εκτρέπουμε το Σ_1 προς τ' αριστερά φέρνοντάς το σε σημείο Γ , που απέχει κατά



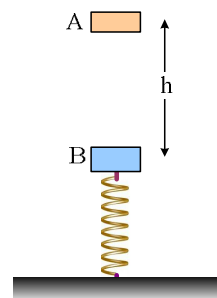
$d=0,9\text{m}$ από ένα σημείο Γ , στο οποίο βρίσκεται ένα δεύτερο σώμα Σ_2 . Τη στιγμή $t=0$ εκτοξεύουμε το σώμα Σ_2 με ταχύτητα $v_2=3\text{m/s}$ που έχει την διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, αφήνοντας ταυτόχρονα το Σ_1 να ταλαντωθεί. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά τη στιγμή $t_1=0,5\text{s}$, ενώ το Σ_2 φτάνει ξανά στο σημείο Γ τη στιγμή $t_2=2\text{s}$.

- Να βρεθεί το αρχικό πλάτος ταλάντωσης του σώματος Σ_1 .
- Πόση είναι η μάζα του σώματος Σ_2 ;
- Να βρεθεί το έργο της δύναμης που ασκήθηκε στο Σ_2 κατά τη διάρκεια της κρούσης.
- Να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσης του Σ_1 μετά την κρούση.

Δίνεται $\pi^2 \approx 10$

103) Ελαστική κρούση και ΑΑΤ.

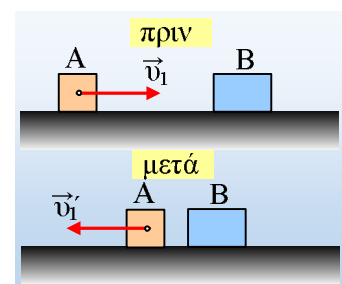
Ένα σώμα A μάζας $1,2\text{kg}$ για $t=0$ αφήνεται να πέσει από ύψος $h=5\text{m}$ πάνω σε δεύτερο σώμα B μάζας 2kg , που ηρεμεί στο ανώτερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k=8\pi^2=80\text{N/m}$. Αν η κρούση είναι μετωπική και ελαστική και διαρκεί απειροελάχιστα, ενώ $g=10\text{m/s}^2$:



- Ποιο ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος A , μεταφέρεται στο σώμα B κατά την κρούση.
- Αποδείξτε ότι τα δύο σώματα θα ξανασυγκρουστούν την χρονική στιγμή $t_1=0,5\text{s}$, δεχόμενοι ότι το σώμα B θα εκτελέσει ΑΑΤ.

104) Ταχύτητες κατά την ελαστική κρούση.

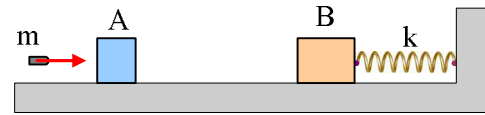
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται ένα σώμα A μάζας $m_1=0,2\text{kg}$ με ταχύτητα $v_1=6\text{m/s}$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο σώμα B μάζας $m_2=0,4\text{kg}$. Μετά την κρούση το A σώμα έχει ταχύτητα ίδιου μέτρου, αλλά αντίθετης φοράς.



- Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα του σώματος B .
- Ποια η μεταβολή της ορμής του A σώματος που οφείλεται στην κρούση;
- Για τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος A :
 - Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος B .
 - Πόση είναι η δυναμική ενέργεια λόγω παραμόρφωσης των δύο σωμάτων;
- Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης που δέχτηκε το σώμα B στη διάρκεια της κρούσης.

105) Είναι ελαστική η κρούση;

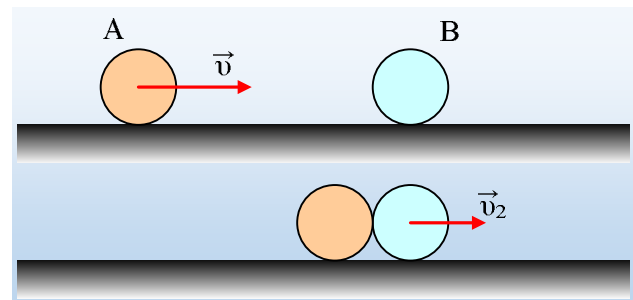
Σε ένα οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα A και B με μάζες $m_1=0,95\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$, όπου το B είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=10\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό του μήκος. Τα σώματα παρουσιάζουν με το επίπεδο συντελεστή τριβής $\mu=0,5$ και η απόσταση μεταξύ τους είναι $d=2\text{m}$. Σε μια στιγμή ένα βλήμα μάζας $m=50\text{g}$ το οποίο κινείται οριζόντια πάνω στην ευθεία που συμπίπτει με τον άξονα του ελατηρίου, με ταχύτητα $v=120\text{m/s}$ σφηνώνεται στο σώμα A.



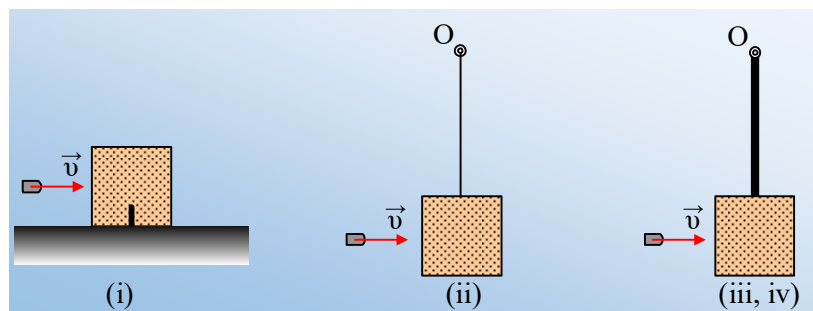
- Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος A μετά την κρούση.
- Με ποια ταχύτητα το A σώμα φτάνει στο σώμα B;
- Αν τελικά το σώμα A, μετά τη δεύτερη κρούση, σταματήσει αφού μετακινηθεί κατά 10cm προς τα αριστερά, να εξετασθεί αν η κρούση μεταξύ των σωμάτων A και B ήταν ελαστική και να υπολογιστεί η τελική απόσταση μεταξύ των σωμάτων, μετά την ακινητοποίησή τους.

106) Και κατά τη διάρκεια της κρούσης;

Μια σφαίρα A μάζας m κινούμενη με ταχύτητα v , συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα B μάζας $2m$.



- Τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση, συνδέονται με τη σχέση:
 - $v_1' = v_2'$
 - $v_1' = 2 v_2'$
 - $v_1' = \frac{1}{2} v_2'$
- Σε μια στιγμή t_1 στη διάρκεια της κρούσης η σφαίρα B έχει ταχύτητα $v_2 = \frac{1}{2} v$.
 - Η ταχύτητα της A σφαίρας τη στιγμή αυτή είναι:
 - μηδέν
 - $\frac{1}{3} v$
 - $\frac{1}{2} v$
 - Η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης των δύο σφαιρών τη στιγμή αυτή είναι:
 - μηδέν
 - $\frac{1}{4} mv^2$
 - $\frac{1}{2} mv^2$.

107) Απώλεια μηχανικής ενέργειας σε κρούση.

Ένα βλήμα μάζας $0,1\text{kg}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v=100\text{m/s}$ σφηνώνεται σε ακίνητο ξύλο μάζας $1,9\text{kg}$. Να βρεθεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας που οφείλεται στην κρούση, όταν το ξύλο είναι:

- πακτωμένο στο έδαφος.

- ii) κρέμεται στο άκρο νήματος μήκους ℓ .
- iii) κρέμεται στο άκρο αβαρούς ράβδου μήκους ℓ , το άλλο άκρο της οποίας μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα..
- iv) κρέμεται στο άκρο της παραπάνω ράβδου, η οποία έχει μάζα 3kg.

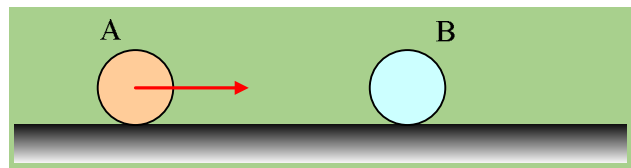
Σε ποια από τις παραπάνω περιπτώσεις το έργο της δύναμης που δέχτηκε το βλήμα από το ξύλο, είναι μεγαλύτερο (κατά απόλυτο τιμή);

Δίνεται για την ράβδο ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = 1/3 m_1 \cdot \ell^2$.

108) Ελαστική κρούση και ενέργειες.

ΘΕΜΑ 2°

Μια μικρή σφαίρα Α μάζας m_1 και κινητικής ενέργειας K , η οποία κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β.



- i) Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Α είναι:

$$\alpha) -\frac{2m_1 m_2 K}{(m_1 + m_2)^2} 100\% \quad \beta) -\frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} 100\% \quad \gamma) -\frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} 100\%$$

- ii) Αν το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας της Α σφαίρας είναι 64%, τότε για τις μάζες των δύο σφαιρών ισχύει:

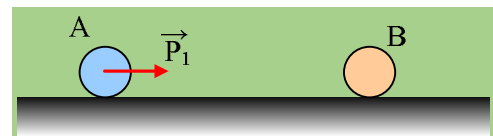
$$\alpha) m_1 = 4m_2 \quad \beta) m_1 = 2m_2 \quad \gamma) m_2 = 2m_1 \quad \delta) m_2 = 4m_1$$

Ποιες από τις παραπάνω σχέσεις μπορούν να ισχύουν;

109) Ελαστική κρούση και ορμές.

ΘΕΜΑ 2°

Μια μικρή σφαίρα Α κινείται έχοντας ορμή P_1 και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β. Μετά την κρούση η Β σφαίρα έχει ορμή $1,5P_1$.



- i) Ο λόγος των μαζών των δύο σφαιρών m_1/m_2 είναι ίσος με:

$$\alpha) 1/3 \quad \beta) 1/2 \quad \gamma) 1 \quad \delta) 3/2$$

- ii) Η μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας είναι ίση με:

$$\alpha) -P_1 \quad \beta) -1,5P_1 \quad \gamma) 0 \quad \delta) 1,5P_1.$$

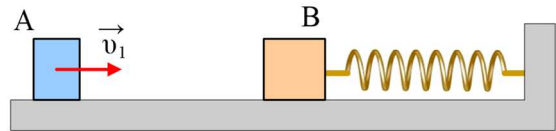
- iii) Η ταχύτητα με την οποία απομακρύνονται οι δυο σφαίρες μετά την κρούση είναι ίση με:

$$\alpha) 1/3 v_1 \quad \beta) 1/2 v_1 \quad \gamma) v_1 \quad \delta) 1,5 v_1$$

όπου v_1 η αρχική ταχύτητα της Α σφαίρας.

110) Μια ελαστική κρούση και μια ταλάντωση.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται ένα σώμα A, μάζας 1kg με ταχύτητα $v_1=3\text{m/s}$, κατευθυνόμενο προς ένα δεύτερο σώμα B, μάζας 2kg το οποίο ταλαντώνεται με πλάτος 0,5m, στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς $k=800\text{N/m}$. Η ταχύτητα του σώματος A έχει τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα.

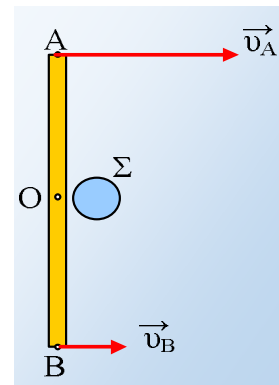


Μετά την μετωπική ελαστική κρούση των δύο σωμάτων, το A σώμα κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου 9m/s.

- i) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος B πριν την κρούση.
- ii) Να βρεθούν οι μεταβολές που οφείλονται στην κρούση:
 - α) της ορμής του A σώματος.
 - β) του πλάτους ταλάντωσης του σώματος B.
 - γ) της ενέργειας ταλάντωσης.
 - δ) της περιόδου ταλάντωσης.

111) Μια σύνθετη κίνηση και μια κρούση.

Μια ομογενής ράβδος μήκους $\ell=1\text{m}$ και μάζας 1kg κινείται οριζόντια στην επιφάνεια μιας παγωμένης λίμνης, χωρίς τριβές και σε μια στιγμή, όπου τα άκρα της έχουν ταχύτητες της ίδιας φοράς με μέτρα $v_A=6\text{m/s}$ και $v_B=2\text{m/s}$, συγκρούεται ελαστικά με μια μικρή σφαίρα Σ, που θεωρείται υλικό σημείο, μάζας 1kg, η οποία ήταν ακίνητη, όπως στο σχήμα. Η σφαίρα Σ κτυπά τη ράβδο στο μέσον της O.



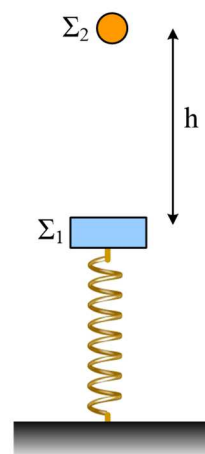
- i) Υπολογίστε την ταχύτητα του μέσου O, καθώς και την κινητική ενέργεια της ράβδου, πριν την κρούση.
- ii) Να βρεθούν οι κινήσεις που θα εκτελέσουν τα δυο σώματα μετά την κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I=M\ell^2/12$.

112) Μια AAT και μια Ελαστική Κρούση.

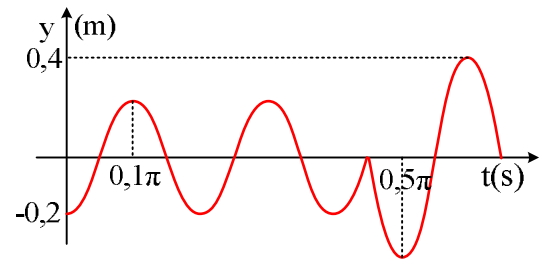
Ένα σώμα Σ_1 μάζας 1kg ηρεμεί στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται στο έδαφος. Πάνω από το σώμα Σ_1 και σε απόσταση h βρίσκεται ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $1/3\text{kg}$.

Εκτρέπουμε κατακόρυφα το Σ_1 κατά 0,2m και κάποια στιγμή που θεωρούμε $t=0$, το αφήνουμε να εκτελέσει AAT. Μετά από λίγο αφήνουμε και το Σ_2 να πέσει και να συγκρουσθεί κεντρικά και ελαστικά με το Σ_1 . Πήραμε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για το Σ_1 , η οποία είχε τη μορφή του παρακάτω σχήματος.



- i) Να βρεθεί η ενέργεια ταλάντωσης, πριν και μετά την κρούση.

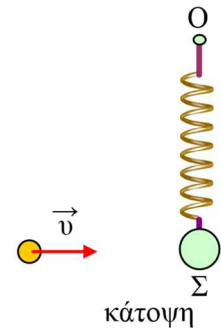
- ii) Ποια χρονική στιγμή για πρώτη φορά το σώμα Σ_1 θα αποκτήσει επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας g ;
- iii) Να βρεθεί η τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 πριν και μετά την κρούση.
- iv) Να βρεθεί η απόσταση h .



Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα ενώ $g=10\text{m/s}^2$.

113) Κρούση σώματος στο άκρο ελατηρίου.

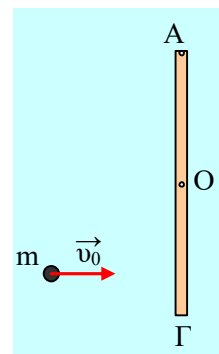
Πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα Σ μάζας 4kg δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς 175N/m και φυσικού μήκους $\ell_0=0,3\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο O . Ένα δεύτερο σώμα μάζας 2kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα κάθετη στον άξονα του ελατηρίου με μέτρο $v=3\text{m/s}$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Σ .



- i) Ποια η ταχύτητα που αποκτά το σώμα Σ λόγω κρούσης;
- ii) Μετά από λίγο, η ταχύτητα του σώματος Σ έχει μέτρο $v_1=1,5\text{m/s}$. Ποια γωνία σχηματίζει η διεύθυνσή της με τον άξονα του ελατηρίου;

114) Ποιες αρχές διατήρησης ισχύουν; Ερώτηση 2.

Μια ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους ℓ μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της A και ηρεμεί σε κατακόρυφη θέση. Ένα σώμα Σ μάζας επίσης m που θεωρείται υλικό σημείο κινείται με ταχύτητα v_0 σε διεύθυνση κάθετη στη ράβδο και συγκρούεται ελαστικά με την ράβδο.



Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

- i) Για την σύγκρουση μεταξύ των δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.
- ii) Για την σύγκρουση μεταξύ των δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής.
- iii) Για την σύγκρουση μεταξύ των δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.
- iv) Αφού η κρούση είναι ελαστική ισχύει:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} m v_2'^2$$

όπου v_1' η ταχύτητα της σφαίρας μετά την κρούση και v_2' η ταχύτητα του κέντρου μάζας O της ράβδου

115) Πλαστική κρούση και α.α.τ. Ερώτηση.

Ένας δίσκος μάζας M ηρεμεί στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου, θέση O , όπως στο σχήμα. Από ορισμένο ύψος h αφήνεται να πέσει μια σφαίρα A μάζας m και να συγκρουσθεί πλαστικά με το δίσκο. Αντίσταση

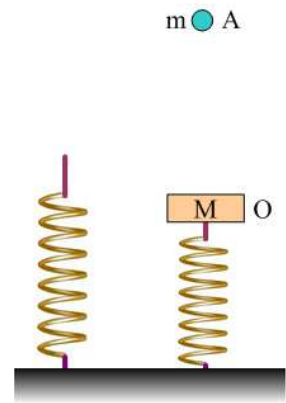
αέρα δεν υπάρχει.

Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις:

- i) Το σύστημα θα εκτελέσει α.α.τ. γύρω από τη θέση O.
- ii) Η μέγιστη ταχύτητα του συστήματος θα είναι στη θέση O.
- iii) Αμέσως μετά την κρούση η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν.

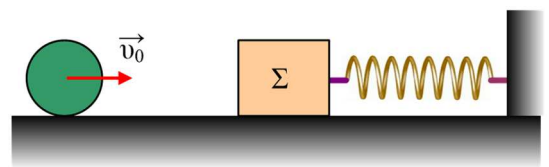
iv) Η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι μεγαλύτερη από $\frac{1}{2} \frac{m^2 g^2}{k}$.

v) Αν $M=3m$, τότε η ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος θα είναι ίση με $\frac{1}{4} mgh$.



116) Μια κρούση σφαίρας και αυτή... η τριβή...

Ένα σώμα Σ μάζας $M=20\text{kg}$ ηρεμεί σ' οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,075$, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k=50\text{N/m}$ που έχει το φυσικό του μήκος. Μια σφαίρα μάζας $m_1=10\text{kg}$ και διαμέ-



τρου $2R=h$, όπου h το ύψος του σώματος Σ, η οποία δεν παρουσιάζει τριβή με το επίπεδο, κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει με ταχύτητα κέντρου μάζας $v_0=1,5\text{m/s}$ και με κατεύθυνση τον άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή η σφαίρα συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το σώμα Σ. Στη διάρκεια της κρούσης δεν αναπτύσσεται δύναμη τριβής μεταξύ σφαίρας και σώματος Σ.

- i) Πόσο τοις εκατό μειώνεται η κινητική ενέργεια της σφαίρας λόγω κρούσης;
- ii) Ποια είναι η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, μέχρι τη θέση που μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος Σ;
- iii) Πόσο συνολικά διάστημα θα διανύσει το σώμα Σ μέχρι να σταματήσει και ποια τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του στην θέση που σταματά;

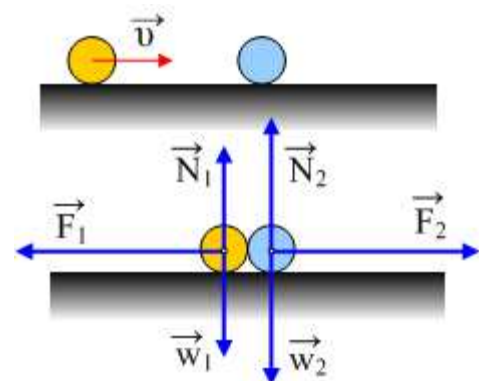
Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς μια διάμετρό της $I= \frac{2}{5} m_1 \cdot R^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

117) Αρχή διατήρησης της ορμής. Πότε ισχύει;

Συνήθως λέμε ότι σε κάθε κρούση ισχύει η ΑΔΟ και ξεχνάμε να πούμε ότι το σύστημα των σωμάτων είναι μονωμένο. Είναι «λογικό» να γίνεται αυτό; Η αλήθεια είναι ότι στην συντριπτική πλειονότητα των κρούσεων είναι σωστό. Ας δούμε όμως τα πράγματα από πιο κοντά...

Παράδειγμα 1°:

Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται μια σφαίρα Α και συγκρούεται μετωπικά με ακίνητη σφαίρα Β. Ισχύει η Α.Δ.Ο.;



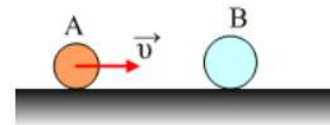
Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σφαίρα στη διάρκεια της κρούσης. Στον κατακόρυφο άξονα y κάθε σφαίρα ισορροπεί και $\Sigma F_y=0$. Συνεπώς για κάθε σφαίρα η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική, οπότε και το διανυσματικό άθροισμα όλων των εξωτερικών δυνάμεων του συστήματος είναι ίσο με μηδέν. Το σύστημα είναι μονωμένο και οι μεταβολές της ορμής κάθε σφαίρας, οφείλονται στις εσωτερικές δυνάμεις F_1-F_2, \dots

118) Μέγιστες τιμές μεγεθών στην ελαστική μετωπική κρούση.

Μια σφαίρα A μάζας m κινείται με ταχύτητα v σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα B μάζας M .

Να βρείτε το λόγο m/M ώστε η σφαίρα B να αποκτήσει:

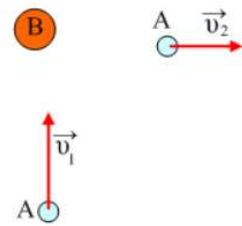
- Μέγιστη ταχύτητα.
- Μέγιστη κινητική ενέργεια.
- Μέγιστη ορμή.



119) Πλάγια κρούση και μεταβολή της ορμής.

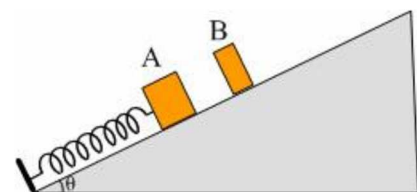
Μια σφαίρα A, μάζας 2kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_1=4\text{m/s}$ και σε μια στιγμή συγκρούεται με μια σφαίρα B με αποτέλεσμα μετά την κρούση να κινείται με ταχύτητα $v_2=3\text{m/s}$ σε διεύθυνση κάθετη στην αρχική, όπως στο σχήμα.

- Να βρεθεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας A.
- Ποια είναι η διεύθυνση της δύναμης που δέχτηκε η A σφαίρα κατά την κρούση, θεωρώντας την σταθερή;
- Σε ποια διεύθυνση θα κινηθεί η B σφαίρα;



120) Ταλάντωση σε πλάγιο επίπεδο και κρούση.

Το σώμα A μάζας $m_1=2\text{kg}$ ηρεμεί σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως $\theta=30^\circ$, δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $K=200\text{N/m}$. Το σώμα A δεν εμφανίζει τριβές με το επίπεδο. Μετακινούμε το σώμα συσπειρώνοντας το ελατήριο κατά $d=0,5\text{m}$ και το αφήνουμε να κινηθεί.



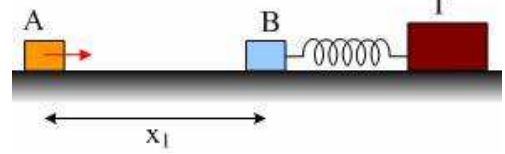
- Να αποδειχθεί ότι το σώμα A θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.
- Πόση ενέργεια καταναλώσαμε για την μετακίνηση του σώματος A κατά d .
- Μετά από μετατόπιση του σώματος A κατά $s=0,9\text{m}$, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλο σώμα B μάζας $m_2=1\text{kg}$, το οποίο ήταν ακίνητο. Μετά την κρούση το σώμα B διανύει απόσταση $0,8\text{m}$ κατά μήκος του επιπέδου.
 - Να βρεθεί η τριβή που ασκήθηκε στο σώμα B κατά την κίνησή του.
 - Να υπολογισθεί η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος A μετά την κρούση.

γ) Να εξετασθεί αν τα δύο σώματα θα ξανασυγκρουσθούν.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

121) Κρούση και τριβές.

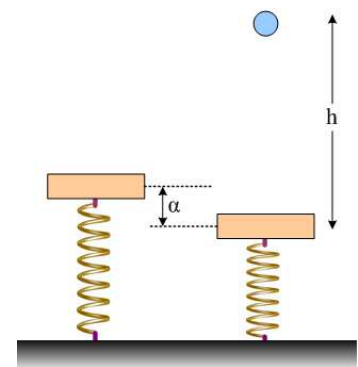
Το σώμα Α μάζας $m_1=2\text{kg}$, εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $v_0=6\text{m/s}$ από απόσταση $x_1=5\text{m}$ προς ακίνητο σώμα Β μάζας $m_2=2\text{kg}$. Το σώμα Β ηρεμεί στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=200\text{N/m}$ και φυσικού μήκους $l_0=1\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σώμα Γ. Η ταχύτητα του σώματος Α έχει την διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου. Το σώμα Β δεν εμφανίζει τριβές με το επίπεδο, ενώ για τα δύο άλλα σώματα έχουμε $\mu=\mu_s=0,2$.



- Με ποια ταχύτητα το σώμα Α φτάνει στο σώμα Β;
- Αν η κρούση των δύο σωμάτων είναι μετωπική και ελαστική, να βρεθεί η ελάχιστη μάζα που πρέπει να έχει το σώμα Γ, ώστε να μην μετακινηθεί.
- Ποιες θα είναι τελικά οι αποστάσεις μεταξύ των σωμάτων, όταν ακινητοποιηθούν;

122) Ενέργεια Ταλάντωσης και Ελαστική κρούση.

Μια πλάκα μάζας $M=4\text{kg}$ ηρεμεί στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς $k=250\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται στο έδαφος. Εκτρέπουμε κατακόρυφα την πλάκα κατά a , οπότε στη θέση αυτή απέχει κατακόρυφη απόσταση $h=1\text{m}$ από μια σφαίρα μάζας $m_1=1\text{kg}$. Σε μια στιγμή αφήνουμε ταυτόχρονα την πλάκα και τη σφαίρα να κινηθούν.



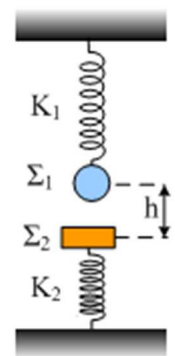
Αν τα δυο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά μετά από χρονικό διάστημα $0,4\text{s}$, ζητούνται:

- Οι ταχύτητες των σωμάτων ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση.
- Η ενέργεια ταλάντωσης της πλάκας πριν και μετά την κρούση.

Δίνεται ότι η κίνηση της πλάκας είναι απλή αρμονική ταλάντωση, $\pi^2=10$ και $g=10\text{m/s}^2$.

123) Ταλάντωση και ελαστική κρούση.

Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1=m_2=2\text{kg}$ ηρεμούν όπως στο σχήμα, απέχοντας μεταξύ τους κατά $h=10\text{cm}$. Τα δύο ελατήρια έχουν σταθερές $K_1=200\text{N/m}$ και $K_2=150\text{N/m}$. Σε μια στιγμή εκτρέπουμε το σώμα Σ_1 κατακόρυφα προς τα πάνω κατά $d=0,2\text{m}$ και για $t=0$ το αφήνουμε να κινηθεί.



- Ν' αποδειχθεί ότι το σώμα Σ_1 εκτελεί α.α.τ.
- Να βρεθεί η περίοδος και το πλάτος ταλάντωσης.
- Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο ($x=f(t)$), αν η προς τα πάνω κατεύθυνση θεωρηθεί θετική.

- iv) Ποια χρονική στιγμή τα δύο σώματα θα συγκρουσθούν;
 v) Αν η κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι κεντρική-ελαστική, να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης των δύο σωμάτων μετά την κρούση.

124) Σύνθεση Ταλαντώσεων και κρούση.

Σώμα Σ_1 μάζας $m_1=1\text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με την βοήθεια ενός συστήματος ελατηρίων με εξίσωση κίνησης:

$$x = 0,1 \cdot \eta\mu 20t + 0,1 \cdot \sqrt{3} \cdot \eta\mu \left(20t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{S.I.})$$

- α) Να αποδείξετε ότι το σώμα εκτελεί μια απλή αρμονική ταλάντωση, της οποίας να βρείτε τα στοιχεία.
 β) Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{5} \text{s}$ το σώμα Σ_1 συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα Σ_2 μάζας $m_2=0,5\text{kg}$ που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, προς την αντίθετη κατεύθυνση από το σώμα Σ_1 με ταχύτητα μέτρου $v_2=1\text{m/s}$. Το συσσωμάτωμα που προκύπτει, εκτελεί α.α.τ. της ίδιας διεύθυνσης γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας.

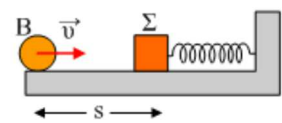
- i) Να προσδιορίσετε την ταχύτητα του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση.
 ii) Να βρείτε την κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
 iii) Η ενέργεια ταλάντωσης μετά την κρούση είναι:

- A) $E = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_k^2 + \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega^2 \cdot x_1^2 = 6,5\text{J}$
 B) $E = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v_k^2 + \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega^2 \cdot x_1^2 = 6,75 \text{ J}$
 Γ) $E = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v_k^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 \cdot x_1^2 = 9,75 \text{ J}$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

125) Κρούση και Ταλάντωση.

Μια σφαίρα μάζας $m=1\text{kg}$ εκτοξεύεται για $t=0$ με ταχύτητα v_1 από το σημείο B, το οποίο απέχει απόσταση $s=3\text{m}$ από ακίνητο σώμα Σ , το οποίο ηρεμεί δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k=20\text{N/m}$. Μετά από λίγο η σφαίρα συγκρούεται μετωπικά με το σώμα Σ , το οποίο μετά την κρούση εκτελεί α.α.τ. με εξίσωση:



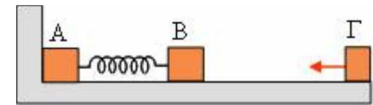
$$x = (2/\pi) \eta\mu(\pi t - \pi) \quad (\text{μονάδες S.I.}).$$

Αν το επίπεδο είναι λείο και η διάρκεια της κρούσεως αμελητέα, η προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, ενώ $\pi^2 \approx 10$, ζητούνται:

- i) Η ταχύτητα v_1 της σφαίρας.
 ii) Ποια χρονική στιγμή η σφαίρα θα ξαναπεράσει από το σημείο B.
 iii) Πόσο θα απέχουν μεταξύ τους τη στιγμή αυτή τα δύο σώματα;

126) Μηχανικό σύστημα και Ελαστική κρούση.

Στο σχήμα το σώμα Γ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_0=3\text{m/s}$ και για $t=0$ συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το σώμα Β. Αν $m_A=m_B=2m_\Gamma=2\text{kg}$ και το ελατήριο έχει φυσικό μήκος $0,5\text{m}$ και σταθερά $K=128\text{N/m}$, ζητούνται:

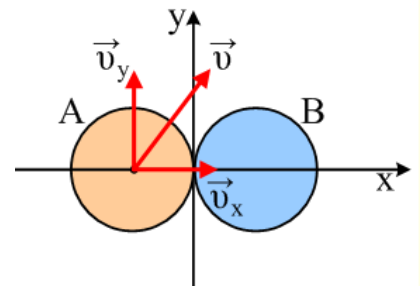


- Η ταχύτητα του σώματος Β μετά την κρούση.
- Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σωμάτων Α και Β.
- Ποια χρονική στιγμή το Α θα αποσπασθεί από τον τοίχο.
- Ποια η δύναμη που δέχεται το σώμα Α από τον τοίχο, σε συνάρτηση με τον χρόνο, αν η κρούση έγινε για $t=0$ και είχε αμελητέα διάρκεια.
- Η μέγιστη ταχύτητα του Α.

Αρχικά τα σώματα Α και Β ήταν ακίνητα και δεμένα με το ελατήριο και το επίπεδο είναι λείο.

127) Πλάγια κρούση.

Μια σφαίρα Α κινείται με ταχύτητα v σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται με ακίνητη σφαίρα Β, ίσης μάζας όπως στο σχήμα. Στο σχήμα βλέπετε τις συνιστώσες της ταχύτητας, v_x στη διεύθυνση της διακέντρου των δύο σφαιρών και v_y σε κάθετη διεύθυνση.



Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις.

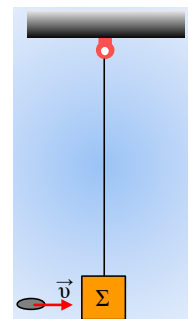
- Μετά την κρούση η Α σφαίρα στον άξονα x θα έχει ταχύτητα με φορά προς τα αριστερά και μέτρο ίσο με v_x .
- Μετά την κρούση η Α σφαίρα στον άξονα y θα έχει ταχύτητα με φορά προς τα πάνω και μέτρο ίσο με v_y .
- Η σφαίρα Β θα κινηθεί μετά την κρούση στη διεύθυνση x.
- Οι δύο σφαίρες θα κινηθούν σε κάθετες διευθύνσεις.
- Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας της Α σφαίρας που οφείλεται στην κρούση είναι ίσο με $100\sin^2\theta$, όπου θ η γωνία που σχηματίζει η αρχική ταχύτητα με τη διάκεντρο των δύο σφαιρών.

128) Τάση του νήματος μετά από κρούση.

Ένα ξύλινο σώμα Σ μάζας $M=950\text{g}$ κρέμεται από νήμα μήκους $2,5\text{m}$. Ένα βήμα μάζας $m=50\text{g}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_1=100\text{m/s}$ σφηνώνεται στο Σ.

- Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.
- Ποια η ελάχιστη τιμή του ορίου θραύσης του νήματος, ώστε αυτό να μην σπάσει;
- Ποια η ελάχιστη τιμή της τάσης του νήματος;

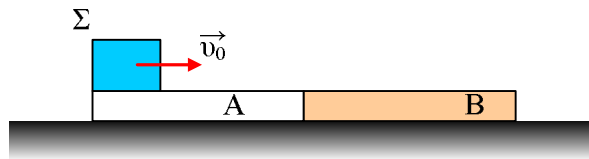
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



129) Κοινή ταχύτητα και πλαστική κρούση.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί σανίδα μάζας $M=3\text{kg}$ και μήκους 4m . Από το ένα άκρο της εκτοξεύουμε πάνω της σώμα Σ, αμελητέων διαστάσεων, μάζας $m=1\text{kg}$ με ταχύτητα $v_0=4\text{m/s}$. Αν το μισό τμήμα της

σανίδας A, δεν παρουσιάζει τριβή με τη σφαίρα, ενώ το άλλο μισό B παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,4$ ζητούνται:

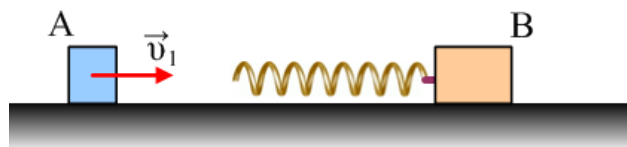


- Ποια η ταχύτητα της σανίδας, όταν σταματήσει πάνω της το σώμα Σ;
- Πόση απόσταση θα διανύσει το σώμα Σ στο τμήμα B μέχρι να σταματήσει και βρείτε επίσης την απόσταση που διανύει η σανίδα μέχρι να σταματήσει να κινείται πάνω της το σώμα Σ,
- Υπολογίστε τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα. Τι ενεργειακές μετατροπές μετράνε τα έργα αυτά;
- Ένα σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $M=3\text{kg}$. Ποια η κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος και ποια η απώλεια της Μηχανικής ενέργειας που οφείλεται στην κρούση;

Δίνεται: $g=10\text{m/s}^2$.

130) Μοντελοποίηση της Πλαστικής και της Ελαστικής κρούσης.

Ένα σώμα A μάζας $m_1=2\text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_1=10\text{m/s}$ και προσπίπτει στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς $K=750\text{N/m}$ και φυσικού μήκους $0,5\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε δεύτερο σώμα B $m_2=3\text{kg}$, το οποίο είναι ακίνητο.

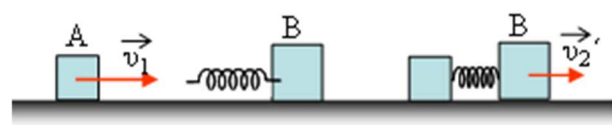


Ζητούνται:

- Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων.
- Η μέγιστη επιτάχυνση που αποκτά το σώμα B.
- Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος B, τη στιγμή που έχει μέγιστη επιτάχυνση.
- Οι τελικές ταχύτητες των δύο σωμάτων.

131) Μονωμένο σύστημα και ελατήριο.

Ένα σώμα A μάζας $m_1=2\text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_1=14\text{m/s}$ και προσπίπτει στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου



είναι στερεωμένο σε δεύτερο σώμα B $m_2=5\text{kg}$, το οποίο είναι ακίνητο. Σε μια στιγμή μετά από ελάχιστο χρόνο το σώμα B έχει ταχύτητα $v_2'=6\text{m/s}$ και επιτάχυνση $a_2=4\text{m/s}^2$. Ζητούνται για τη στιγμή αυτή:

- i) Η ταχύτητα του σώματος A και
- ii) Η επιτάχυνση του A σώματος.

132) Κρούση σφαίρας με το έδαφος

Αφήνουμε από ορισμένο ύψος h μια μπάλα να πέσει και αφού κτυπήσει στο έδαφος, επιστρέφει στην αρχική της θέση. Αντίσταση από τον αέρα δεν υπάρχει.

- i) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.
 - α) Το ολικό έργο του βάρους είναι μηδέν, επειδή ήταν κάθετο στην μετατόπιση.
 - β) Κατά την κρούση της μπάλας με το έδαφος, διατηρείται η κινητική της ενέργεια.
 - γ) Η κρούση με το έδαφος ήταν ελαστική.
 - δ) Η ορμή της μπάλας, κατά την κρούση της με το έδαφος, διατηρείται.
- ii) Σε μια στιγμή, κατά την κρούση, η ταχύτητα της μπάλας γίνεται (στιγμιαία) μηδέν. Τι έχει γίνει την στιγμή αυτή η αρχική δυναμική ενέργεια της σφαίρας;
- iii) Η δύναμη που δέχεται η μπάλα από το έδαφος είναι διατηρητική (Συντηρητική); Εξηγείστε την άποψή σας.

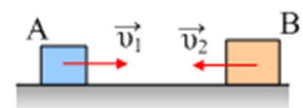
133) Σκέδαση

Σε ένα πείραμα του Rutherford ένα σωματίο a κινούμενο με ταχύτητα $v_0=10^6\text{m/s}$ αλληλεπιδρά με έναν ακίνητο πυρήνα δεκαπλάσιας μάζας. Μετά τη κρούση το σωματίο a κινείται σε διεύθυνση κάθετη προς την αρχική.

- i) Ποια η τελική ταχύτητα του σωματίου a ;
- ii) Ποιο το μέτρο και ποια η διεύθυνση κίνησης του πυρήνα μετά τη κρούση;

134) Γιατί ελαστική η κρούση;

Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο κινούνται δύο σώματα A και B, με μάζες 2kg και 3kg αντίστοιχα και ταχύτητες ίσων μέτρων 5m/s , όπως στο σχήμα. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.



- i) Ποιες οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση;
- ii) Σε μια στιγμή στη διάρκεια της κρούσης, το σώμα A σταματά στιγμιαία.
 - a) Ποια η ταχύτητα του B σώματος τη στιγμή αυτή;
 - b) Πόση είναι τη στιγμή αυτή η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης των δύο σωμάτων;