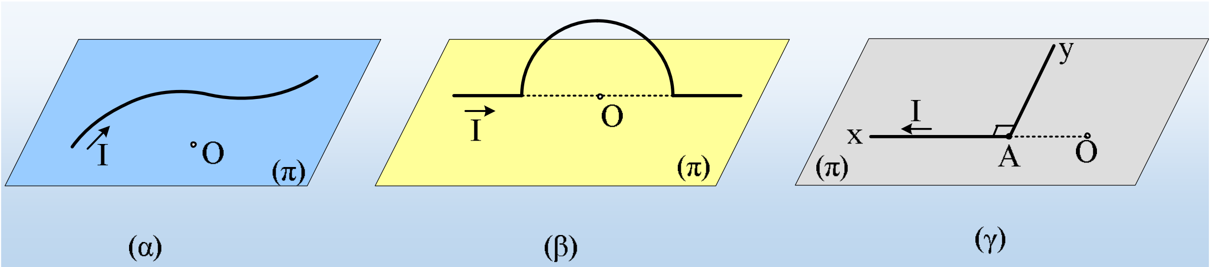
Το μαγνητικό πεδίο τριών αγωγών



i) Στο (α) σχήμα ένας αγωγός τυχαίου σχήματος, βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο (π), ενώ διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι. Να αποδείξετε ότι η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο αγωγός αυτός, στο σημείο Ο του οριζοντίου επιπέδου, είναι κατακόρυφη (κάθετη στο επίπεδο (π)).

ii) Στο σχήμα (β) ο αγωγός αποτελείται από δυο ευθύγραμμα τμήματα και ένα ημικύκλιο ακτίνας r. Το επίπεδο του αγωγού είναι κατακόρυφο (κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο (π)). Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι.

α) Να σχεδιάσετε την ένταση του μαγνητικού πεδίου, το οποίο δημιουργεί ο αγωγός, στο σημείο Ο του οριζοντίου επιπέδου, που είναι το κέντρο του ημικυκλίου.

β) Από ποια εξίσωση υπολογίζεται το μέτρο $B_β$ του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Ο;

iii) Στο (γ) σχήμα ο αγωγός είναι οριζόντιος, αποτελείται από δυο πολύ μακριά ευθύγραμμα τμήματα Αx και Αy, κάθετα μεταξύ τους και διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι. Αν το σημείο Ο του οριζοντίου επιπέδου βρίσκεται στην προέκταση του Αx απέχοντας από την κορυφή Α απόσταση (ΑΟ)=α:

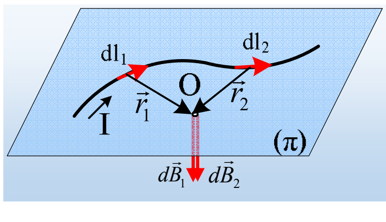
α) Να σχεδιάσετε την ένταση του πεδίου στο σημείο Ο.

β) για το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου $B_γ$ στο Ο, ισχύει:

α) $B_γ < B_β$, β) $B_γ = B_β$, γ) $B_γ > B_β$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:



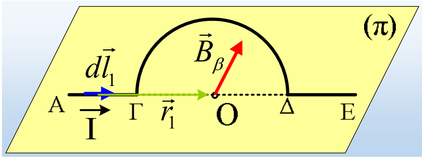
i) Ας πάρουμε ένα στοιχειώδες τμήμα dl_1 και έστω $\vec{r}_1$ το διάνυσμα από το μέσον του dl_1 στο σημείο Ο. Αν βάλουμε τον αντίχειρα στην κατεύθυνση του διανύσματος $d\vec{l}_1$ και τον δείκτη στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{r}_1$, τότε ο μέσος μας δείχνει την κατεύθυνση του αντίστοιχου στοιχειώδους μαγνητικού πεδίου $d\vec{B}_1$ που δημιουργεί το τμήμα dl_1 στο σημείο Ο (κανόνας των τριών δακτύλων). Αλλά τότε προκύπτει ότι το διάνυσμα $d\vec{B}_1$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $d\vec{l}_1$ και $\vec{r}_1$, το οποίο είναι το οριζόντιο επίπεδο (π), άρα είναι κατακόρυφο όπως στο σχήμα.

Αν τώρα πάρουμε ένα οποιοδήποτε άλλο στοιχειώδες τμήμα $d\vec{l}_2$ του αγωγού, με την ίδια λογική προκύπτει και αυτό δημιουργεί στο Ο ένα στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο, επίσης κατακόρυφο, όπως στο σχήμα. Τότε όμως αφού κάθε τμήμα δημιουργεί μαγνητικό πεδίο κατακόρυφο με φορά προς τα κάτω και το συνολικό μαγνητικό πεδίο στο Ο, ως το διανυσματικό άθροισμα:

$$\vec{B}_o = d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2 + d\vec{B}_3 + \ldots$$

Θα είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο (π), άρα κατακόρυφο με την ίδια κατεύθυνση με τα επιμέρους στοιχειώδη μαγνητικά πεδία $d\vec{B}_i$.

ii) Ο αγωγός μας αποτελείται από τρία τμήματα. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΔΕ και το κατακόρυφο ημικύκλιο. Αν πάρουμε ένα στοιχειώδες τμήμα του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ, τότε η γωνία μεταξύ του $d\vec{l}_1$ και της απόστασης $\vec{r}_1$ είναι μηδενική, οπότε από τον νόμο των Biot-Savart βρίσκουμε ότι στο κέντρο Ο του ημικυκλίου, εξαιτίας του $d\vec{l}_1$ θα έχουμε;



$$dB_1 = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\,dl}{r_1^2}\eta\mu 0° = 0$$

Το ίδιο συμβαίνει με κάθε στοιχειώδες τμήμα του ΑΓ, αλλά και του ΔΕ, όπου η αντίστοιχη γωνία είναι 180°.

α) Με βάση τα παραπάνω, για το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο Ο του ημικυκλίου, τελικά μένει μόνο το μαγνητικό πεδίο του ημικυκλίου, με αποτέλεσμα η ένταση να είναι κάθετη στο επίπεδο του ημικυκλίου, άρα το διάνυσμα B_β είναι οριζόντιο, όπως στο σχήμα.

β) Κάθε στοιχειώδες τμήμα dl του ημικυκλίου, είναι κάθετο στην ακτίνα r του ημικυκλίου, με αποτέλεσμα να δημιουργεί στο Ο στοιχειώδη ένταση μέτρου:

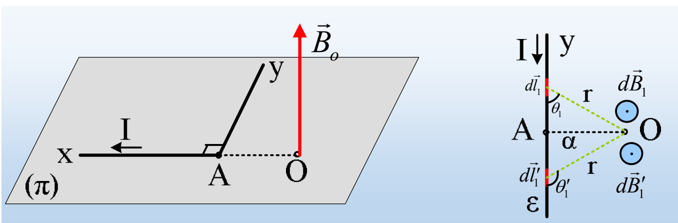
$$dB_i = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\,dl}{r_1^2}\eta\mu 90° = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\,dl}{r_1^2}$$

Οπότε η συνολική ένταση του πεδίου, θα έχει μέτρο:

$$B_\beta = \sum dB_i = \sum \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\,dl_1}{r^2} + \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\,dl_2}{r^2} + \ldots + \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\,dl_\nu}{r^2} \rightarrow$$

$$B_\beta = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I}{r^2}\left(dl_1 + dl_2 + \ldots + dl_\nu\right) = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I}{r^2}\cdot \pi r = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\pi I}{r} = \frac{\mu_o I}{4r}\,(1)$$

iii) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα το τμήμα Αx, δεν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο σημείο Ο, στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος.



α) Αλλά τότε το μαγνητικό πεδίο στο Ο οφείλεται στο τμήμα Αy και με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού, η ένταση θα είναι κάθετη στο επίπεδο (π) με φορά προς τα πάνω όπως στο πρώτο από τα παραπάνω σχήματα.

β) Στο δεύτερο σχήμα (σε κάτοψη) έχουμε πάρει έναν ευθύγραμμο αγωγό (απείρου μήκους) ε, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα. Τότε στο σημείο Ο σε απόσταση α=r θα έχουμε μαγνητικό πεδίο έντασης:

$$B_o = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2I}{r}$$

Η παραπάνω ένταση μπορεί να προκύψει από τον νόμο των Biot-Savart, αν χωρίσουμε τον αγωγό σε στοιχειώδη τμήματα dl και υπολογίσουμε το άθροισμα:

$$B_o = \sum dB_i = \sum \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}\eta\mu\theta_i$$

Το παραπάνω άθροισμα μπορεί να σπάσει σε δύο αθροίσματα, ένα για το τμήμα yA και ένα για το συμμετρικό του Αy΄ και να πάρουμε:

$$B_o = \sum_1 \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}\eta\mu\theta_i + \sum_2 \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}\eta\mu\theta_i$$

Αλλά για κάθε τμήμα dl_1 στο τμήμα yA, υπάρχει ένα συμμετρικό τμήμα dl_1', το οποίο απέχει την ίδια απόσταση από το Ο, ενώ οι γωνίες θ_1 και θ_1΄είναι παραπληρωματικές με ίσα ημίτονα. Κατά συνέπεια τα δύο παραπάνω αθροίσματα είναι ίσα και μπορούμε να γράψουμε:

$$B_o = 2\sum_1 \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}\eta\mu\theta_i \rightarrow B_o = 2B_\gamma \rightarrow B_\gamma = \frac{1}{2}B_o \rightarrow$$

$$B_\gamma = \frac{1}{2}\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2I}{r} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I}{r} \quad (2)$$

Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων (1) και (2) προκύπτει ότι $B_\beta > B_\gamma$, στην πραγματικότητα:

$$B_\beta = \pi \cdot B_\gamma.$$

Σωστό το α).

dmargaris@gmail.com