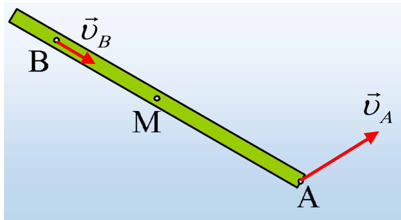
Μια ράβδος σε παγωμένη λίμνη

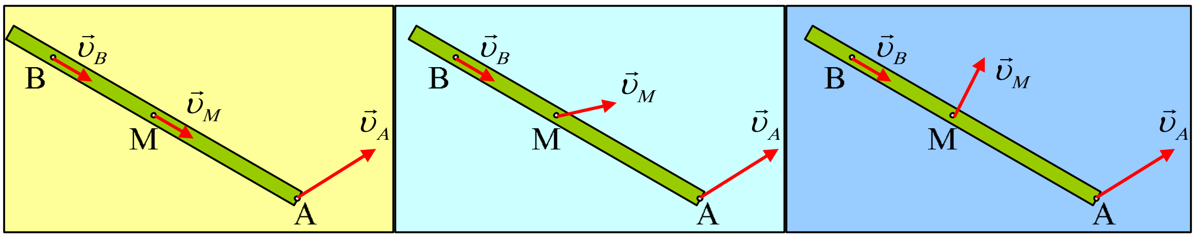


Μια ελεύθερη ομογενής ράβδος, κινείται οριζόντια, στην επιφάνεια μιας παγωμένης λίμνης και την στιγμή που βρίσκεται στην θέση του σχήματος (σε κάτοψη), το άκρο της Α, καθώς και ένα σημείο Β, έχουν τις ταχύτητες υ_A και υ_B αντίστοιχα, όπως έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα.

i) Να εξηγήσετε γιατί η κίνηση της ράβδου δεν είναι μεταφορική.

ii) Σε ποιο από τα παρακάτω σχήματα έχει σημειωθεί σωστά η ταχύτητα του μέσου Μ της ράβδου (ποιοτικό σχήμα), όπου στο (γ) η ταχύτητα υ_M είναι κάθετη στην ράβδο.

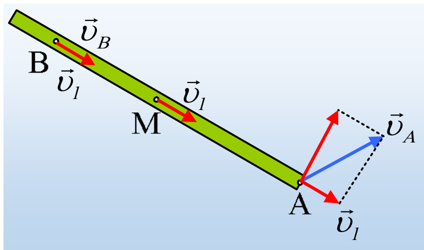
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Απάντηση:

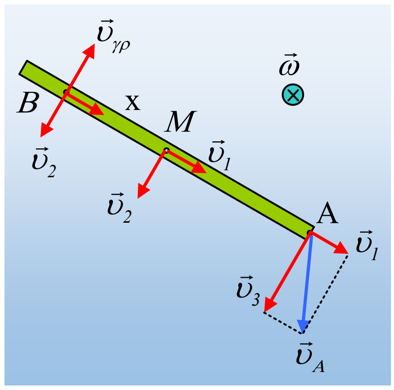
i) Κατά την μεταφορική κίνηση ενός στερεού σώματος, όλα του τα σημεία έχουν την ίδια ταχύτητα. Εδώ τα σημεία Α και Β της ράβδου έχουν διαφορετικές ταχύτητες, άρα η κίνηση ΔΕΝ είναι μεταφορική.

ii) Ας θεωρήσουμε την κίνηση της ράβδου σύνθετη. Μια μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm}, αυτή του κέντρου μάζας Μ και μια στροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το Μ. Όσον αφορά την ταχύτητα του κέντρου μάζας, αυτή μπορεί να αναλυθεί σε δύο άξονες. Μια συνιστώσα υ_1 κατά μήκος της ράβδου και μια συνιστώσα υ_2, κάθετη στην ράβδο. Για την συνιστώσα υ_1, αυτή θα είναι ίση με την ταχύτητα υ_B του σημείου Β, αφού η απόσταση ΒΜ δεν θα αλλάζει! Την ίδια συνιστώσα $\upsilon_{Ax}=\upsilon_1$ έχει και η ταχύτητα του σημείου Α, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπάρχει και κάθετη στην ράβδο συνιστώσα της ταχύτητας του κέντρου μάζας Μ;



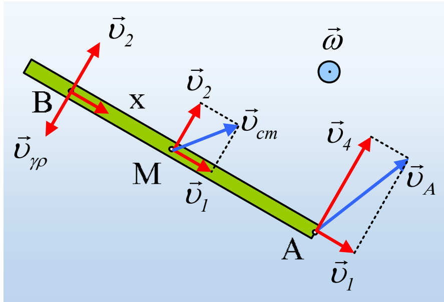
Ας έρθουμε τώρα στην περιστροφική κίνηση. Πώς μπορεί τώρα να περιστρέφεται η ράβδος;

Έστω ότι η ράβδος στρέφεται με την φορά περιστροφής των δεκτών του ρολογιού, όπως στο διπλανό σχήμα. Τότε το σημείο Β έχει μια γραμμική ταχύτητα, λόγω της κυκλικής του κίνησης γύρω από το Μ, με μέτρο $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega x$, όπου x=(BM). Αλλά για να είναι η ταχύτητα του Β η υ_B που μας δόθηκε, θα πρέπει το σημείο Β, λόγω μεταφορικής



κίνησης να έχει και μια συνιστώσα ταχύτητας υ_2, αντίθετη της $\upsilon_{\gamma\rho}$. Αλλά τότε αν έρθουμε στο άκρο Α θα έχει αντίστοιχα τις ταχύτητες του σχήματος, όπου η ταχύτητά του, θα προκύπτει από την σύνθεση της υ_1 και της υ_3, όπου $\upsilon_3 = \upsilon_2 + \omega \cdot \frac{l}{2}$, με αποτέλεσμα η συνολική του ταχύτητα να έχει την κατεύθυνση του παραπάνω σχήματος, διαφορετική από αυτήν που μας έχει δοθεί. Η υπόθεσή μας δηλαδή κατέληξε σε άτοπο!

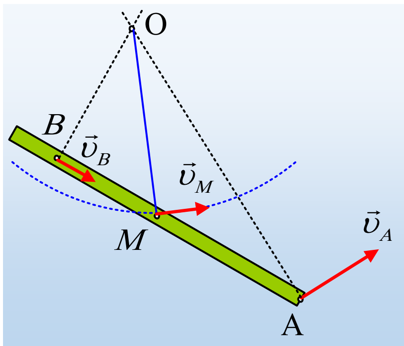
Δεν μένει παρά η ράβδος να στρέφεται αντιωρολογιακά, όπως στο διπλανό σχήμα. Τότε η υ_2 θα έχει αντίθετη κατεύθυνση από πριν και η ταχύτητα του άκρου Α, θα προκύπτει από την σύνθεση της υ_1 και της υ_4, όπου $\upsilon_4 = \upsilon_2 + \omega \cdot \frac{l}{2}$, αποτέλεσμα σύμφωνο με τα δεδομένα μας.



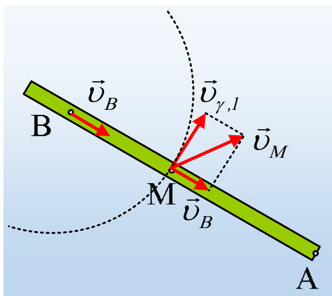
Αλλά τότε η ταχύτητα του μέσου Μ της ράβδου θα προκύπτει από την σύνθεση των $\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_{cm}$, οπότε σωστό είναι το σχήμα (β).

Σχόλια για καθηγητές.

1) Η κίνηση της ράβδου θα μπορούσε να μελετηθεί με την χρήση του στιγμιαίου άξονα, ο οποίος περνάει από το σημείο Ο, όπου τέμνονται οι κάθετες στις ταχύτητες των σημείων Α και Β, οπότε η ράβδος στρέφεται, γύρω από το Ο και η ταχύτητα του μέσου Μ είναι εφαπτόμενη στον αντίστοιχο κύκλο (κάθετη στην ΟΜ) και έχει μέτρο $\upsilon_M = \omega \cdot (OM)$.



2) Η γενική κίνηση ενός στερεού μπορεί να θεωρηθεί ως μια μεταφορά και μια περιστροφή, όχι υποχρεωτικά ως προς το κέντρο μάζας.
Αν λοιπόν θεωρήσουμε την περιστροφή γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το σημείο Β, τότε το σημείο Μ θα έχει την ταχύτητα του Β (για την μεταφορά) και μια γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\gamma,1} = \omega \cdot (BM)$, όπως στο σχήμα.
Αλλά τότε η ταχύτητα του μέσου Μ, θα έχει την κατεύθυνση του σχήματος, σε συμφωνία με το (β) σχήμα. Το γιατί είναι αυτή η κατεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας του Μ, αρκεί να σκεφτούμε τι συμβαίνει με την ταχύτητα του άκρου Α.



dmargaris@gmail.com