Περί κύλισης και τριβής.

Με αφορμή ένα τεθέν ερώτημα, ας δούμε λίγο αναλυτικά τι σημαίνει κύλιση ενός τροχού και τι συμβαίνει με την ασκούμενη δύναμη τριβής.

Ας δούμε αρχικά, τι γράφει το σχολικό βιβλίο:

Ας επανέλθουμε στην κύλιση του τροχού (σχ. 4.5). Κατά την κύλιση κάθε σημείο του τροχού έρχεται διαδοχικά σε επαφή με το δρόμο. Έτσι, όταν ο τροχός σε χρόνο dt μετακινηθεί κατά ds, ένα σημείο Α της περιφέρειας του θα έχει στραφεί κατά τόξο μήκους ds, στο οποίο αντιστοιχεί η επίκεντρη γωνία dθ. Η ταχύτητα υ_{cm} του κέντρου μάζας του τροχού είναι

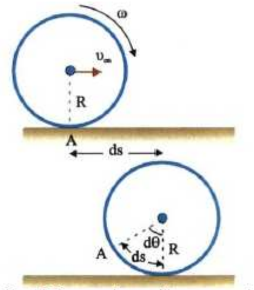
$$\upsilon_{cm} = \frac{ds}{dt}$$

όμως $d\theta = \frac{ds}{R}$ ή $ds = Rd\theta$

αντικαθιστώντας έχουμε $\upsilon_{cm} = \frac{Rd\vartheta}{dt}$ και, επειδή $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$

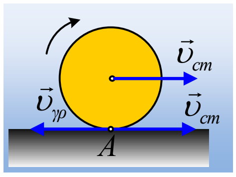
τελικά παίρνουμε

$$\boxed{\upsilon_{cm} = \omega \cdot R}$$



Σχ. 4.5 Όταν το κέντρο μάζας του τροχού μετακινηθεί κατά ds, κάθε σημείο στην περιφέρεια του στρέφεται κατά το ίδιο τόξο.

Για να δούμε, πώς «μεταφράζονται» από μια άλλη οπτική γωνία τα παραπάνω.



Η κύλιση του τροχού μπορεί να θεωρηθεί σύνθετη κίνηση, αποτελούμενη από μια μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm} και μια στροφική με γωνιακή ταχύτητα ω. Αλλά τότε αν εστιάσουμε στο σημείο Α, σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος, αυτό έχει τις ταχύτητες του διπλανού σχήματος, όπου $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R$. Αλλά τότε με βάση την παραπάνω σχέση του βιβλίου $\upsilon_{cm}=\omega R$, έχουμε ότι $\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}=\omega R$.

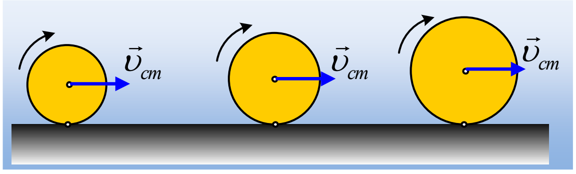
Αλλά τότε το σημείο του τροχού Α δεν έχει ταχύτητα ή αν προτιμάτε έχει την ίδια ταχύτητα με το σημείο επαφής Α΄ του εδάφους.

Θα μπορούσαμε λοιπόν να ορίσουμε ως κύλιση, την κίνηση εκείνη, όπου δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των σημείων επαφής Α-Α΄ του τροχού και του εδάφους.

Ας δούμε πώς εφαρμόζονται τα παραπάνω σε διάφορες περιπτώσεις, αλλά και πώς και αν η κύλιση συνδέεται με την άσκηση δύναμης τριβής, με τη βοήθεια κάποιων εφαρμογών.

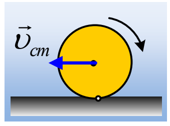
Εφαρμογή 1η:

Τρεις τροχοί αυτοκινήτων Α, Β και Γ με ακτίνες $R_1=0{,}3m$, $R_2=0{,}4m$ και $R_3=0{,}5m$ αντίστοιχα, κινούνται σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα $\upsilon_{cm}=6m/s$ και γωνιακή ταχύτητα $\omega=15rad/s$, όπως στο σχήμα.



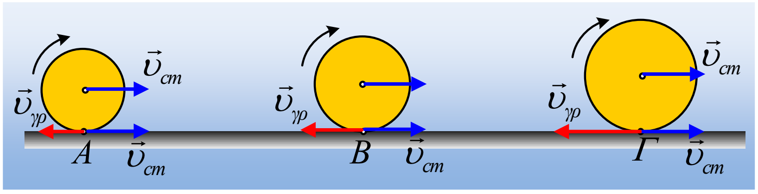
i) Να εξετάσετε αν κάποιος τροχός κυλίεται. Τι κάνουν οι υπόλοιποι;

ii) Ένας Δ τροχός ακτίνας 0,4m αφήνεται σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα υ_{cm}=6m/s και γωνιακή ταχύτητα ω=15rad/s, όπως στο σχήμα. Κυλίεται ο τροχός αυτός;



Απάντηση:

i) Εστιάζουμε στο σημείο επαφής κάθε τροχού με το έδαφος. Το σημείο αυτό έχει μια ταχύτητα υ_{cm} εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και μια γραμμική ταχύτητα λόγω της κυκλικής κίνησης του σημείου, γύρω από το κέντρο Ο του τροχού, όπου $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R$.



Αλλά τότε το κάθε σημείο έχει ταχύτητα:

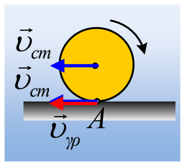
$\upsilon_A=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}-\omega R_1$=6m/s-15·0,3m/s=1,5m/s

$\upsilon_B=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}-\omega R_2$=6m/s-15·0,4m/s= 0m/s

$\upsilon_\Gamma=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}-\omega R_3$=6m/s-15·0,5m/s= -1,5 m/s.

Άρα μόνο ο Β τροχός κυλίεται, αφού η ταχύτητα του σημείου επαφής του με το έδαφος είναι μηδενική. Αντίθετα ο τροχός Α ολισθαίνει και ο Γ «σπινάρει» (που σημαίνει ότι έχουμε ξανά ολίσθηση στο σημείο επαφής).

ii) Σημειώνουμε ξανά τις ταχύτητες, όπως αναφέρθηκε προηγούμενα του σημείου επαφής Α, του τροχού με το έδαφος, όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά τότε βλέπουμε ότι η ταχύτητα του Α είναι:



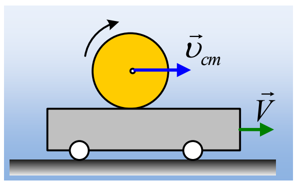
$$\upsilon_A=\upsilon_{cm}+\omega R$$

συνεπώς διάφορη από το μηδέν και ο τροχός ολισθαίνει.

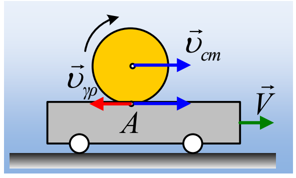
Αξίζει να σημειωθεί ότι $\upsilon_{cm}=\omega R$=6m/s αλλά ο τροχός δεν κυλίεται αφού οι δυο ταχύτητες έχουν την ίδια κατεύθυνση με αποτέλεσμα υ_A=12m/s! Δεν αρκεί να πούμε ότι ισχύει μια εξίσωση όπως $\upsilon_{cm}=\omega R$!

Εφαρμογή 2η:

Ο Α τροχός της παραπάνω εφαρμογής ακτίνας R_1=0,3m, κινείται πάνω σε οριζόντια πλατφόρμα με ταχύτητα υ_{cm}=6m/s και γωνιακή ταχύτητα ω=15rad/s. Η πλατφόρμα κινείται επίσης με ταχύτητα V=1,5m/s. Κυλίεται ή ολισθαίνει ο τροχός αυτός;



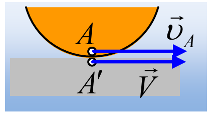
Απάντηση:



Στο σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις ταχύτητες του σημείου επαφής Α. Και πάλι έχουμε:

$$\upsilon_A=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}-\omega R_1=6m/s-15\cdot 0{,}3m/s=1{,}5m/s$$

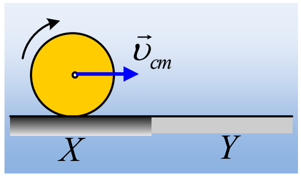
Αλλά ταχύτητα V=1,5m/s έχει και η πλατφόρμα.



Συνεπώς αν πάρουμε το σημείο Α του τροχού που έρχεται σε επαφή με το σημείο Α΄ της πλατφόρμας, βλέπουμε ότι τα δύο σημεία έχουν ίσες ταχύτητες και κινούνται μαζί. Δεν υπάρχει με άλλα λόγια σχετική κίνηση μεταξύ τους και ο τροχός κυλίεται, χωρίς να έχουμε κάποια ολίσθηση.

Να σημειωθεί ότι οι παραπάνω ταχύτητες, είναι αυτές που μετράει ένας ακίνητος παρατηρητής στο έδαφος.

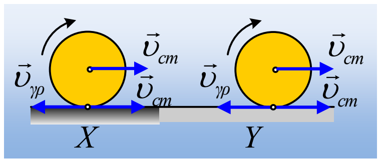
Εφαρμογή 3η:



Ένας τροχός ακτίνας R=0,4m, κινείται πάνω σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο Χ και κάποια στιγμή περνά στο λείο οριζόντιο επίπεδο Υ, με ταχύτητα υ_{cm}=6m/s και γωνιακή ταχύτητα ω=15rad/s.

Να εξετάσετε αν ο τροχός κυλίεται σε κάποιο επίπεδο.

Απάντηση:



Στο σχήμα έχουμε σχεδιάσει ξανά τις ταχύτητες του σημείου επαφής Α.

Και πάλι έχουμε:

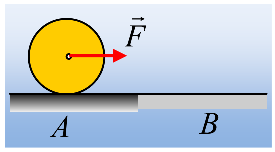
$$\upsilon_A=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}-\omega R=6m/s-15\cdot 0{,}4m/s=0\ m/s$$

Συνεπώς ο τροχός κυλίεται.

Αλλά ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και όταν ο τροχός περάσει στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Δεν πρόκειται να αλλάξει κάτι και ο τροχός θα συνεχίσει να κυλίεται.

Με άλλα λόγια η κύλιση δεν συνδέεται με το αν το επίπεδο είναι ή όχι λείο.

Εφαρμογή 4η:



Ένας τροχός μάζας 10kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο Α με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0{,}5$. Σε μια στιγμή ασκείται στον άξονά του μια σταθερή οριζόντια δύναμη F=60Ν. Μετά από λίγο ο τροχός εισέρχεται και συνεχίζει την κίνησή του σε δεύτερο λείο οριζόντιο επίπεδο Β.

i) Να υπολογίστε την τριβή που ασκείται στον κύλινδρο από το επίπεδο Α.

ii) Υπάρχει κάποια περιοχή όπου ο κύλινδρος κυλίεται;

iii) Αν το Β επίπεδο δεν ήταν λείο, αλλά οι συντελεστές τριβής του κυλίνδρου με αυτό ήταν $\mu_1=\mu_{1s}=0{,}1$, να εξετάσετε αν ο κύλινδρος μπορεί να κυλίεται στη διάρκεια της κίνησής του σε αυτό.

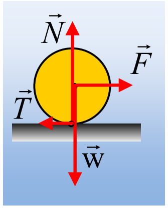
Δίνεται για τον τροχό $I=\frac{1}{2}MR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό. Θεωρώντας την κίνησή του σύνθετη, έχουμε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα:

Μεταφορική κίνηση: $F\text{-}T=M\cdot\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R=\frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)



Το ερώτημα που ανακύπτει είναι, αν ο τροχός κυλίεται ή όχι και αυτό δεν το γνωρίζουμε. **Υποθέτουμε** λοιπόν ότι κυλίεται (η κύλιση μπορεί να θεωρηθεί η πλέον «συνήθης» κίνηση ενός τροχού). Αλλά τότε θα ισχύει η γνωστή συνθήκη της κύλισης $\upsilon_{cm}=\omega\cdot R$ *ή* $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ (3)

Οι εξισώσεις (1), (2) και (3) αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων, που επιλύουμε:

$$\left.\begin{array}{l} F\text{-}T=M\cdot\alpha_{cm} \\ T=\frac{1}{2}M\cdot\alpha_{cm} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \quad F=\frac{3}{2}M\cdot a_{cm} \rightarrow a_{cm}=\frac{2F}{3M} \rightarrow$$

$$a_{cm}=\frac{2F}{3M}=\frac{2\cdot 60}{3\cdot 10}m/s^2=4m/s^2.$$

Αλλά τότε η τριβή έχει μέτρο $T=\frac{1}{2}M\cdot\alpha_{cm}=\frac{1}{2}10\cdot 4N=20N.$

Είναι σωστή η υπόθεσή μας περί κύλισης; Υπολογίζουμε την μέγιστη τιμή της στατικής τριβής (την οριακή τριβή):

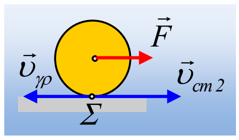
$$T_{o\rho}=\mu_s\cdot N=\mu_s\cdot Mg=0{,}5\cdot 10\cdot 10N=50N$$

Αυτό σημαίνει ότι πριν αρχίσει να ολισθαίνει ο τροχός, μπορεί να ασκηθεί πάνω του στατική τριβή μέτρου, μέχρι και 50Ν, ενώ η απαραίτητη τριβή για την παραπάνω κίνηση είναι 20Ν. Συνεπώς ο τροχός κυλίεται και η ασκούμενη τριβή είναι στατική μέτρου 20Ν.

ii) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, ο τροχός κυλίεται στο Α επίπεδο. Τη στιγμή που ο τροχός φτάνει στο Β επίπεδο, κυλίεται, έχοντας μια ταχύτητα κέντρου μάζας υ_{cm1} και μια γωνιακή ταχύτητα ω_1 και ισχύει $\upsilon_{cm1}=\omega_1 R$.

Από εκεί και πέρα συνεχίζει να επιταχύνεται μεταφορικά, αφού $\Sigma F=M\alpha_{cm2} \rightarrow F=M\cdot\alpha_{cm2}$ συνεπώς η ταχύτητα του κέντρου μάζας αυξάνεται ($\upsilon_{cm2}=\upsilon_{cm1}+\alpha_{cm2}\Delta t$) , ενώ η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή, αφού δεν ασκείται κάποια ροπή στον κύλινδρο, η οποία θα την μετέβαλε.

Αλλά τότε αν σχεδιάσουμε τις ταχύτητες του σημείου επαφής Σ με το επίπεδο, θα έχουμε ότι:



$$\upsilon_\Sigma=\upsilon_{cm2}-\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm2}-\omega_1 R=\upsilon_{cm2}-\upsilon_{cm1}=\alpha_{cm2}\cdot\Delta t>0$$

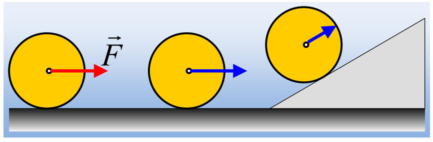
πράγμα που σημαίνει ότι το σημείο Σ έχει ταχύτητα προς τα δεξιά και ο τροχός ολισθαίνει.

iii) Με βάση την μελέτη στο i) ερώτημα, για να μπορεί να κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο ο τροχός, είναι απαραίτητο να μπορεί να ασκηθεί πάνω του στατική τριβή, μέτρου 20Ν. Αλλά τώρα η οριακή τριβή μεταξύ του τροχού και του Β επιπέδου είναι:

$$T_{ορ/Β}=μ_{s1}\cdot N=μ_{s1}\cdot Mg=0,1\cdot 10\cdot 10N=10N$$

Συνεπώς και πάλι, παρότι το επίπεδο δεν είναι λείο, ο τροχός θα ολισθαίνει.

Εφαρμογή 5η:



Ο τροχός της προηγούμενης εφαρμογής μάζας 10kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $μ=μ_s=0,2$. Σε μια στιγμή ασκείται στον άξονά του μια σταθερή οριζόντια δύναμη F=15N. Μετά από 2s η δύναμη καταργείται. Στη συνέχει ο τροχός συναντά ένα κεκλιμένο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει τον ίδιο συντελεστή τριβής.

Να εξετάσετε αν ο τροχός κυλίεται, καθώς και αν ασκείται δύναμη τριβής στον τροχό:

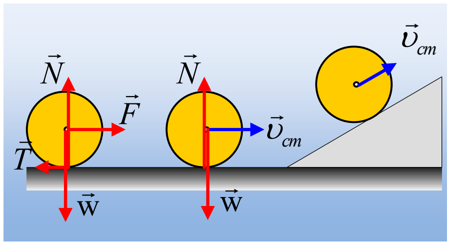
i) Στη διάρκεια της άσκησης της δύναμης F.

ii) Μετά την κατάργηση της δύναμης F.

iii) Κατά τη διάρκεια της ανόδου στο κεκλιμένο επίπεδο.

Δίνεται για τον τροχό $I=½ MR^2$ και $g=10m/s^2$, ενώ για την κλίση του επιπέδου ημθ=0,6 και συνθ=0,8.

Απάντηση:



i) Δουλεύοντας όπως στο i) ερώτημα της προηγούμενης εφαρμογής έχουμε:

$$a_{cm}=\frac{2F}{3M}=\frac{2\cdot 15}{3\cdot 10}m/s^2=1m/s^2.$$

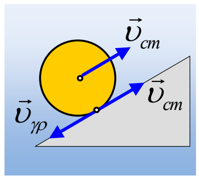
Αλλά τότε η τριβή έχει μέτρο $T=½\ M\cdot α_{cm}=½\ 10\cdot 1N=5N$.

Είναι σωστή η υπόθεσή μας περί κύλισης; Υπολογίζουμε την μέγιστη τιμή της στατικής τριβής (την οριακή τριβή):

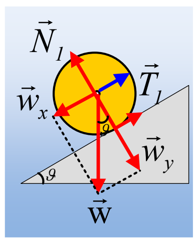
$$T_{ορ}=μ_s\cdot N=μ_s\cdot Mg=0,2\cdot 10\cdot 10N=20N$$

Συνεπώς ο τροχός κυλίεται κατά τη διάρκεια της άσκησης της δύναμης F.

ii) Μόλις πάψει να ασκείται η δύναμη F, το σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος έχει μηδενική ταχύτητα και αυτό δεν υπάρχει λόγος να αλλάξει. Συνεπώς ο τροχός θα συνεχίσει να κυλίεται, χωρίς να ασκείται πάνω του δύναμη τριβής.



iii) Μόλις ο τροχός αρχίσει να ανεβαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο, εξαιτίας της συνιστώσας w_x θα αρχίσει να επιβραδύνεται συνεπώς θα μειώνεται η $υ_{cm}$. Αλλά τότε αν εστιάσουμε στο σημείο επαφής του με το επίπεδο $υ_{γρ}=ωR>υ_{cm}$, δηλαδή το σημείο αυτό τείνει να αποκτήσει ταχύτητα αντίθετη της $υ_{cm}$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι θα ασκηθεί πάνω του τριβή, με φορά προς τα πάνω, όπως στο διπλανό σχήμα.



Θεωρώντας ξανά την κίνησή του σύνθετη, έχουμε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα (δουλεύουμε με τα μέτρα των μεγεθών):

Μεταφορική κίνηση: $w_x-T_1=M\cdot α_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $Στ=I\cdot α_{γων} \rightarrow T_1 \cdot R= ½\, MR^2 \cdot α_{γων}$ (2)

Υποθέτοντας ξανά ότι ο τροχός κυλίεται θα ισχύει ότι $υ_{cm}=ω\cdot R$ ή $α_{cm}=α_{γων}\cdot R$ (3)

Οι εξισώσεις (1), (2) και (3) αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων, που επιλύουμε:

$$\left.\begin{aligned} &Mgημθ-T=M\cdot α_{cm} \\ &T= ½\, M\cdot α_{cm} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} \quad Mg\,ημϑ = \frac{3}{2}M \cdot a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{2g\,ημϑ}{3} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 0{,}6}{3} = 4m/s^2.$$

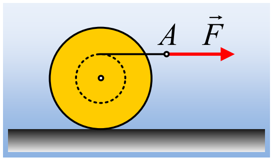
Αλλά τότε η τριβή έχει μέτρο $T= ½\, M\cdot α_{cm}= ½\, 10\cdot 4N=20N.$

Είναι σωστή η υπόθεσή μας περί κύλισης; Υπολογίζουμε την μέγιστη τιμή της στατικής τριβής (την οριακή τριβή):

$$T_{ορ}=μ_s\cdot N=μ_s\cdot Mg\cdot συνθ=0{,}2\cdot 10\cdot 10\cdot 0{,}8N=16N$$

Συνεπώς δεν μπορεί να ασκηθεί στατική τριβή μέτρου 20N στον τροχό και ο τροχός ολισθαίνει κατά την κίνησή του στο κεκλιμένο επίπεδο, ενώ δέχεται τριβή ολίσθησης παράλληλη με την ταχύτητα μέτρου 16N.

Εφαρμογή 6η:

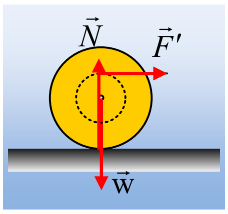


Ο κύλινδρος του σχήματος έχει ακτίνα R και μάζα 5kg και ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $μ=μ_s=0{,}2$. Ο κύλινδρος έχει εγκοπή βάθους ½ R στην οποία έχει τυλιχθεί ένα αβαρές νήμα, στο άκρο A του οποίου, κάποια στιγμή ασκούμε οριζόντια δύναμη F.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του, ο οποίος συνδέει τα κέντρα των δύο βάσεων $I= ½\, mR^2$.

Να εξετάσετε αν ο κύλινδρος θα κυλίεται και αν πάνω του ασκηθεί δύναμη τριβής.

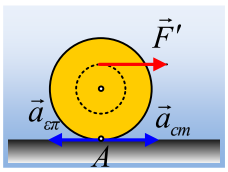
Απάντηση:



Ας δούμε τι ακριβώς θα συμβεί, μόλις ασκηθεί στον κύλινδρο, μέσω του νήματος δύναμη F΄=F, όπως στο διπλανό σχήμα.

Θεωρώντας την κίνησή του σύνθετη, έχουμε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα:

Μεταφορική κίνηση: $F΄= F =M\cdot α_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{F}{M}$



Στροφική κίνηση: $Στ=I\cdot α_{γων} \rightarrow F \cdot ½\, R= ½\, MR^2\cdot α_{γων} \rightarrow a_{γων} = \frac{F}{MR} = \frac{a_{cm}}{R}$

Αλλά τότε το σημείο επαφής A, του κυλίνδρου με το έδαφος έχει μηδενική επιτάχυνση. Πράγματι:

$$\alpha_A=\alpha_{cm}-\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=0$$

Οπότε δεν πρόκειται να κινηθεί ως προς το έδαφος και να αποκτήσει κάποια ταχύτητα ολίσθησης.

Αλλά τότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται, χωρίς να ασκηθεί δύναμη τριβής πάνω του.

Συμπέρασμα:

Δεν πρέπει να συνδέεται η κύλιση με την ύπαρξη ή όχι δύναμης τριβής.

Κύλιση σημαίνει ότι το σημείο επαφής ενός τροχού με την επιφάνεια, πάνω στην οποία πραγματοποιείται η κίνηση, δεν έχει σχετική ταχύτητα ως προς το αντίστοιχο σημείο επαφής της επιφάνειας.

Από την άλλη, η Τριβή είναι μια δύναμη, που πάντα «καιροφυλακτεί» να κάνει την εμφάνισή της. Αν θα εμφανιστεί ή όχι εξαρτάται αν υπάρχει σχετική κίνηση ή αν τουλάχιστον τείνει να υπάρξει κίνηση, μεταξύ των ή του σημείου επαφής.

dmargaris@gmail.com