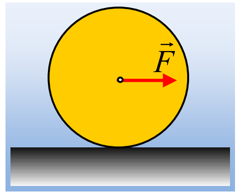
Μην χάσουμε τον σύνδεσμο ή τον κινηματικό περιορισμό!!!

Σε πάρα πολλές περιπτώσεις κατά τη μελέτη του στερεού, το πρόβλημα επιλύεται με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα, τόσο για την περιστροφική κίνηση κάποιου στερεού, όσο και για την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του ή μεταφορική κίνηση άλλου υλικού σημείου, το οποίο συνδέεται με κάποιο τρόπο με το στερεό μας. Αλλά οι εξισώσεις αυτές δεν επαρκούν από μόνες τους για την επίλυση. Μας λείπει μια εξίσωση, η οποία συνήθως είναι μια «εξίσωση συνδέσμου», δηλαδή μια εξίσωση που αναφέρεται σε κάποιο σημείο και στις ιδιαίτερες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί και που μπορεί να συνδέει τις δύο διαφορετικές κινήσεις. Αν δεν εστιάσουμε στο σύνδεσμο αυτό, το πρόβλημά μας, δεν θα επιλυθεί…

Ας δούμε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις.

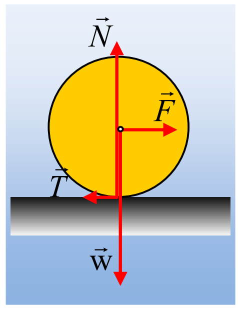
Εφαρμογή 1η:



Ένας τροχός μάζας 20kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή ασκείται στον άξονά του μια σταθερή οριζόντια δύναμη F=30N, οπότε αρχίζει να κυλίεται. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του άξονα μετά από 10s.

Δίνεται για τον τροχό I= ½ MR^2.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό. Θεωρώντας την κίνησή του σύνθετη, έχουμε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα:

Μεταφορική κίνηση: $F\text{-}T=M\cdot\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R=\frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Ναι αλλά πώς συνδέονται οι δυο παραπάνω κινήσεις; Με τη γνωστή συνθήκη της κύλισης* $\upsilon_{cm}=\omega\cdot R$ ή $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ (3)

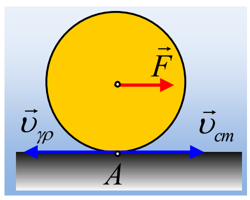
Οι εξισώσεις (1), (2) και (3) αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων, που επιλύουμε:

$$\left.\begin{array}{l} F\text{-}T=M\cdot\alpha_{cm} \\ T=\frac{1}{2}M\cdot\alpha_{cm} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} F=\frac{3}{2}M\cdot a_{cm} \rightarrow a_{cm}=\frac{2F}{3M} \rightarrow$$

$$a_{cm}=\frac{2F}{3M}=\frac{2\cdot 30}{3\cdot 20}m/s^2=1m/s^2.$$

Αλλά τότε η ταχύτητα του άξονα, η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού είναι:

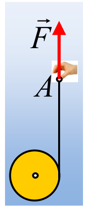
$$\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t=10m/s.$$



* Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να εστιάσουμε στο σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος Α. Το σημείο αυτό έχει μια ταχύτητα υ_{cm} εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης του τροχού και μια $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R$ εξαιτίας της κυκλικής κίνησής του, που οφείλεται στην περιστροφή του τροχού. Αλλά αφού ο τροχός κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) $\upsilon_A=0$ ή $\upsilon_{cm}=\omega\cdot R$ (3).

Εφαρμογή 2η:

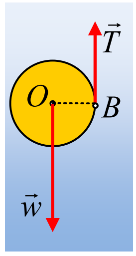
Γύρω από ένα γιο-γιο μάζας 0,1kg έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Αφήνουμε το γιο-γιο να κινηθεί, από κάποιο ύψος, ασκώντας στο άκρο Α του νήματος μια κατακόρυφη δύναμη F, όπως στο σχήμα. Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F, αν το άκρο Α του νήματος αποκτά επιτάχυνση με κατεύθυνση προς τα πάνω $α_A=2m/s^2$.



Δίνεται η ροπή αδράνειας του γιο-γιο ως προς τον άξονά του $I=½\,mR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο-γιο γιο, το βάρος και την τάση του νήματος Τ, ίση με τη δύναμη F που ασκούμε στο άκρο του νήματος Α. Δεν ξέρουμε αν το γιο-γιο ανεβαίνει ή κατεβαίνει. Ας υποθέσουμε ότι κατέρχεται ενώ ταυτόχρονα στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού.



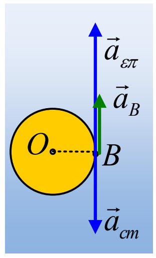
Θεωρώντας την κίνηση του σώματος ως σύνθετη, έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $ΣF=m\cdot α_{cm} \rightarrow mg\text{-}T=m\cdot α_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $Στ=I\cdot α_{γων} \rightarrow T\cdot R=½\,mR^2\cdot α_{γων} \rightarrow T=½\,mR\cdot α_{γων}$ (2)

Πώς μπορούμε να συνδέσουμε τις δύο παραπάνω κινήσεις; Ποιος είναι ο σύνδεσμος;

Ερχόμαστε στο σημείο Β, όπου το νήμα συναντά τον κύλινδρο. Το σημείο Β είναι σημείο του νήματος, άρα έχει επιτάχυνση προς τα πάνω μέτρου $α_B=α_A=2m/s^2$, αλλά ταυτόχρονα είναι ένα σημείο του κυλίνδρου και έχει μια επιτάχυνση ίση με $α_{cm}$, εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης του γιο-γιο και μια επιτρόχια επιτάχυνση $α_ε=α_{γων}\cdot R$, λόγω της κυκλικής κίνησης που πραγματοποιεί το σημείο Β, γύρω από το κέντρο Ο. Αλλά τότε:



$$α_B=α_{επ}-α_{cm}$$

Οπότε με αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων (1) και (2) (αφού την πολλαπλασιάσουμε επί 2) παίρνουμε:

$$mg-3T=m(α_{cm}-α_{γων}\cdot R) \rightarrow$$

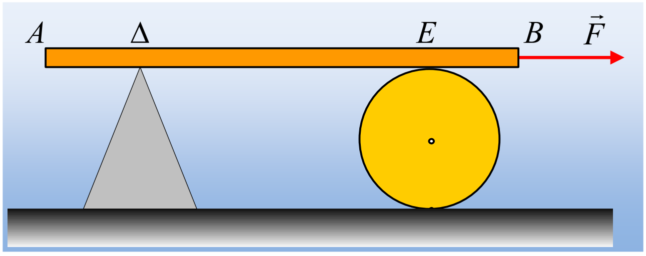
$$mg-3T=-m\cdot α_B \rightarrow$$

$$T=\frac{m(g+a_B)}{3}=\frac{0{,}1(10+2)}{3}N=0{,}4N$$

Συνεπώς και *F=0,4N*.

Εφαρμογή 3η:

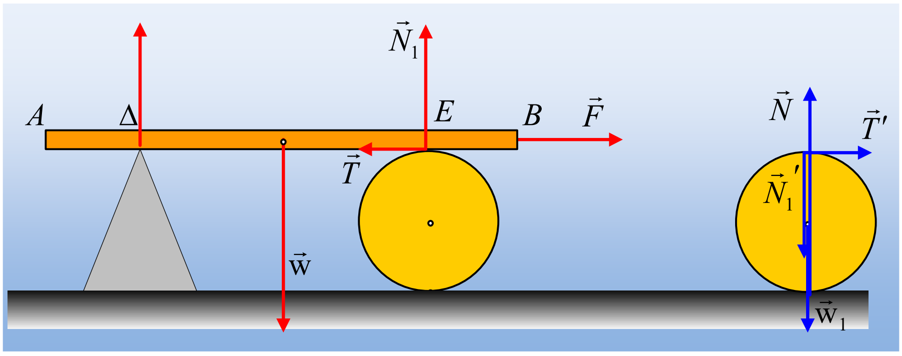
Η ομογενής δοκός ΑΒ μήκους $\ell=6m$ και μάζας Μ=20kg ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε λείο υποστήριγμα στο σημείο της Δ και σε κύλινδρο μάζας m=10 kg στο σημείο Ε, όπως στο σχήμα. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο.



Σε μια στιγμή ασκούμε στη δοκό οριζόντια σταθερή δύναμη F=14N, με αποτέλεσμα να μετακινείται και ο κύλινδρος, χωρίς να γλιστράει πάνω του η δοκός. Αν (ΑΕ) = (ΔΒ)=1m, ενώ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = ½\ mR^2$, να υπολογίστε την επιτάχυνση της δοκού.

Απάντηση:

Στο αριστερό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις μόνο στη δοκό, ενώ δεξιά στον κύλινδρο, όπου T η στατική τριβή που ασκείται από τον κύλινδρο στη δοκό και T΄η αντίδρασή της που ασκείται στον κύλινδρο.



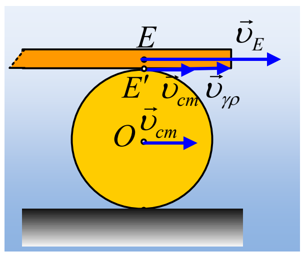
Για την κίνηση της δοκού ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$\Sigma F=M\alpha \rightarrow F\text{-}T=M\cdot\alpha \quad (1)$$

Θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του κυλίνδρου, θα έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $T'=m\cdot\alpha_{cm}$ (2)

Στροφική κίνηση: $T'\cdot R=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T= ½\ mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (3)



Υπάρχει εδώ κάποιος σύνδεσμος που θα μας επιτρέψει να «συνδέσουμε» την κίνηση της δοκού με την κίνηση του κυλίνδρου; Ας εστιάσουμε στο σημείο επαφής τους. Για να μην γλιστρά η δοκός, θα πρέπει η ταχύτητά της (υ_E) να είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου Ε΄ του κυλίνδρου που έρχεται σε επαφή με τη δοκό.

Αλλά $\upsilon_{E'}=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}+\omega\cdot R=\upsilon_E$. Με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\frac{d\upsilon_E}{dt}=\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}+\frac{d(\omega R)}{dt}\rightarrow$$

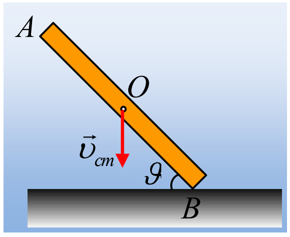
$$\alpha=\alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\omega\nu}R \quad (4)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (1), (2), (3) και (4) αποτελούν ένα σύστημα, η επίλυση του οποίου θα μας δώσει τις τιμές των μεγεθών. Έτσι από (2) και (3) παίρνουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=2\alpha_{cm}$, οπότε η (4) γίνεται $\alpha=3\alpha_{cm}$. Έτσι με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$F=M\alpha+m\alpha_{cm} \rightarrow F=(3M+m)\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$\alpha_{cm}=\frac{F}{3M+m}=\frac{14}{3\cdot 20+10}m/s^2=0{,}2m/s^2.$$

Εφαρμογή 4^η:

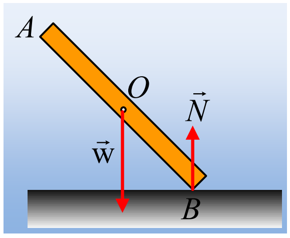


Μια ομογενής ράβδος ΑΒ στέκεται κατακόρυφη πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Επειδή η θέση ισορροπίας είναι ασταθής, εκτρέποντας ελαφρώς τη ράβδο αυτή αρχίζει να πέφτει. Σε μια στιγμή στη διάρκεια της πτώσης, η ράβδος σχηματίζει με το επίπεδο γωνία θ=40°. Αν στη θέση αυτή το μέσον της ράβδου έχει ταχύτητα υ_{cm}, τότε το άκρο Β έχει ταχύτητα:

α) $\upsilon_B < \upsilon_{cm}$, β) $\upsilon_B = \upsilon_{cm}$, γ) $\upsilon_B > \upsilon_{cm}$,

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

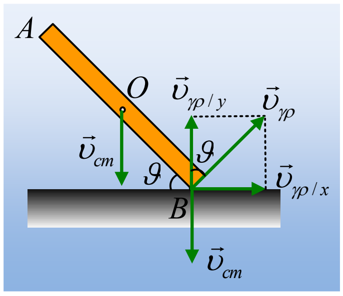
Απάντηση:



Στο σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο σε μια τυχαία θέση. Αφού και οι δύο δυνάμεις είναι κατακόρυφες, εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας έχουμε:

$$\Sigma F=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow w-N=m\cdot\alpha_{cm}.$$

Συνεπώς το κέντρο μάζας θα έχει, σε κάθε θέση, κατακόρυφη επιτάχυνση και θα κινηθεί ευθύγραμμα, με αποτέλεσμα κάθε στιγμή να έχει κατακόρυφη ταχύτητα υ_{cm}.



Θεωρώντας την κίνηση της ράβδου σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το μέσον της Ο, τότε το άκρο Β θα έχει μια ταχύτητα ίση με υ_{cm}, την ταχύτητα του κέντρου μάζας και μια γραμμική ταχύτητα, λόγω της κυκλικής κίνησής του γύρω από το Ο, όπως στο σχήμα, όπου $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot\frac{\ell}{2}$.

Αλλά η $\upsilon_{\gamma\rho}$ είναι κάθετη στη ράβδο, συνεπώς σχηματίζει γωνία θ=40° με την κατακόρυφη διεύθυνση (γωνίες με κάθετες πλευρές). Έτσι αναλύοντάς την σε δυο συνιστώσες, μια οριζόντια και μια κατακόρυφη, όπως στο σχήμα, θα πάρουμε:

$$\upsilon_{\gamma\rho/y}=\omega\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\vartheta \quad \text{και} \quad \upsilon_{\gamma\rho/x}=\omega\frac{\ell}{2}\eta\mu\vartheta \quad (1)$$

Αλλά εδώ έχουμε έναν «κινηματικό περιορισμό», που δεν είναι άλλος από το ότι το σημείο Β είναι υποχρεωμένο να κινηθεί στο οριζόντιο επίπεδο, πράγμα που σημαίνει ότι:

$$\upsilon_y=0 \rightarrow \upsilon_{\gamma\rho/y}=\upsilon_{cm} \rightarrow \upsilon_{cm}=\omega\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\vartheta \quad (2)$$

Διαιρώντας την (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

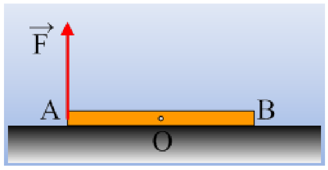
$$\frac{\upsilon_{\gamma\rho/x}}{\upsilon_{cm}}=\frac{\omega\frac{\ell}{2}\eta\mu\vartheta}{\omega\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\vartheta}\Rightarrow\upsilon_{\gamma\rho/x}=\upsilon_{cm}\cdot\varepsilon\varphi\vartheta<\upsilon_{cm}$$

Αφού εφ40°<1.

Σωστό το α).

Εφαρμογή 5η:

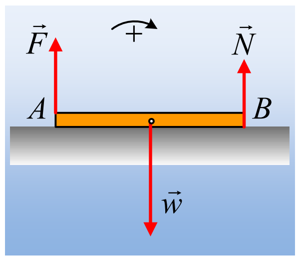
Μια ομογενής σανίδα μήκους 2m και μάζας 1kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε στο ένα της άκρο Α μια κατακόρυφη δύναμη F=6N.



Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση του μέσου Ο της και του άκρου Α της ράβδου. Δίνεται g=10m/s^2 και η ροπή αδράνειας της σανίδας ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της $I_{cm}=\frac{1}{12}mL^2$.

Απάντηση:

Προφανώς δεν μπορεί μια δύναμη 6N να ανασηκώσει τη ράβδο με βάρος 10N, συνεπώς η ράβδος δεν θα εγκαταλείψει το επίπεδο, αλλά θα ανασηκωθεί. Το ερώτημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε είναι σε ποιο σημείο ασκείται η κάθετη αντίδραση Ν του επιπέδου, αφού μόλις ασκήσουμε τη δύναμη στο άκρο Α, ο φορέας της Ν μεταφέρεται προς τα δεξιά. Αλλά η ακραία θέση, είναι η Ν να ασκηθεί στο άκρο Β, πράγμα που σημαίνει ότι η ράβδος επιταχύνεται προς τα πάνω ενώ συνεχίζει να βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος.



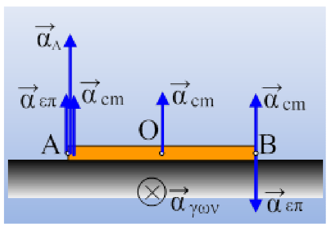
Θεωρούμε τώρα την κίνησή της σανίδας ως σύνθετη, αποτελούμενη από μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από νοητό οριζόντιο άξονα κάθετο στη σανίδα που περνά από το κέντρο μάζας Ο. Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

Για τη μεταφορική κίνηση: ΣF=m·α_{cm} →F+N-w==m·α_{cm} (1)

Περιστροφική κίνηση: Στ=Ι·$\alpha_{\gamma\omega\nu}$ →

$$F\cdot\frac{L}{2}-N\cdot\frac{L}{2}=\frac{1}{12}mL^2a_{\gamma\omega\nu}\to F-N=\frac{1}{6}mL\cdot a_{\gamma\omega\nu}\quad(2)$$

Έχουμε εδώ κάποιο σύνδεσμο, ο οποίος να συνδέει τις δυο παραπάνω κινήσεις και στον οποίο πρέπει να εστιάσουμε;



Ας έρθουμε στο άκρο Β. Το σημείο αυτό έχει μια επιτάχυνση α_{cm} εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και μια επιτρόχια $\alpha_{\varepsilon\pi}$, ίση με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητα, λόγω της κυκλικής κίνησης γύρω από το Ο. Επειδή μιλάμε για αρχική επιτάχυνση, κεντρομόλος επιτάχυνση δεν υπάρχει, αφού έχουμε μηδενική γωνιακή ταχύτητα. Αλλά το άκρο Β δεν επιταχύνεται (ούτε προς τα πάνω, αφού τότε θα μηδενιζόταν η Ν και θα είχαμε τη ράβδο με βάρος 10Ν να επιταχύνεται προς τα πάνω με άσκηση δύναμης 6N, αλλά προφανώς ούτε προς τα κάτω), οπότε $α_B=0$ ή $α_{cm}=α_{γων}\frac{L}{2}$ και η εξίσωση (2) γίνεται:

$$F - N = \frac{1}{3}m \cdot a_{cm} \ (2^{α})$$

Με πρόσθεση των (1) και ($2^{α}$) παίρνουμε: $2F - mg = \frac{4}{3}m \cdot a_{cm} \rightarrow$

$$a_{cm} = \frac{3F}{2m} - \frac{3}{4}g = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 1}m/s^2 - \frac{3}{4}10m/s^2 = 1{,}5m/s^2$$

Οπότε η επιτάχυνση του άκρου Α είναι: $α_A= α_{cm}+α_{γων}\frac{L}{2}=2\ α_{cm}=3m/s^2$.

dmargaris@gmail.com