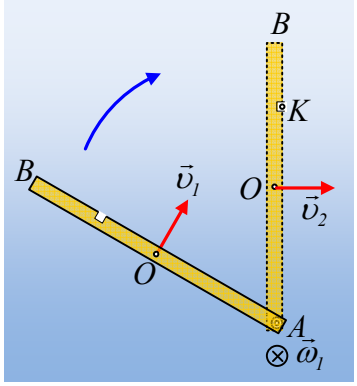
Αλλαγή του άξονα περιστροφής.

Μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ=1m και μάζας M=3kg στρέφεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το ένα της άκρο A με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_1=4rad/s. Σε μια στιγμή η ράβδος αποδεσμεύεται από τον άξονα περιστροφής της, ενώ ταυτόχρονα προσδένεται σε δεύτερο κατακόρυφο άξονα K, ο οποίος απέχει από το άκρο B απόσταση (BK) = ¼ ℓ. Να υπολογιστούν:



κάτοψη

i) Η ταχύτητα του μέσου O της ράβδου, πριν και μετά την πρόσδεσή της στον 2ο άξονα περιστροφής της.

ii) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας που συνοδεύει την παραπάνω πρόσδεση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της I=Mℓ²/12.

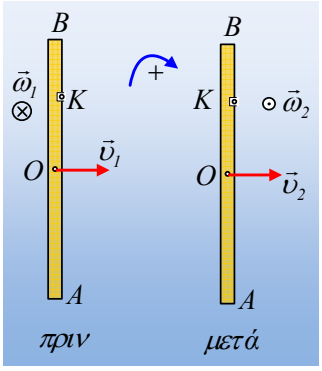
Απάντηση:

i) Στη διάρκεια της περιστροφής της ράβδου γύρω από το άκρο A, το μέσον O της ράβδου εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας R= ½ ℓ , συνεπώς έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_1=\upsilon_{cm}=\omega_1 R=\omega_1\frac{\ell}{2}=4\frac{1}{2}m/s=2m/s\,.$$

Στη διάρκεια της πρόσδεσης της ράβδου στον σταθερό άξονα K, προφανώς δέχεται μια άγνωστη δύναμη από αυτόν. Αν όμως δούμε τις ροπές των εξωτερικών δυνάμεων (βάρος, κάθετη αντίδραση και δύναμη από τον άξονα), θα παρατηρήσουμε ότι όλες είναι μηδενικές, συνεπώς η στροφορμή της ράβδου, ως προς τον νέο άξονα περιστροφής, παραμένει σταθερή. Τη στιγμή που σπάει ο άξονας στο άκρο A η κίνηση της ράβδου μπορεί να θεωρηθεί σαν κίνηση ενός ελεύθερου σώματος, το οποίο εκτελεί σύνθετη κίνηση, μεταφορική με ταχύτητα υ_1=2m/s και στροφική γύρω από νοητό άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της O και είναι κάθετος στη ράβδο με ω=4rad/s.

Έτσι παίρνοντας ως θετική, την αρχική φορά περιστροφής (ωρολογιακή φορά), έχουμε



$$L_{\pi\rho\iota\nu/K}=L_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}/K}\rightarrow$$

$$I_o\omega_1-M\upsilon_1 R=I_K\omega_2$$

Όπου η αρχική στροφορμή είναι το άθροισμα της ιδιοστροφορμής ($I_{cm}\cdot\omega_1$) και της στροφορμής λόγω κίνησης του κέντρου μάζας [$M\upsilon_1$(KO)], ενώ μετά την πρόσδεση θεωρούμε μια στροφική κίνηση γύρω από τον άξονα K, με ροπή αδρά-

νειας $I_K = I_{cm} + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$ Έτσι η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\omega_2 = \frac{4\ell\omega_1 - 12\upsilon_1}{7\ell} = \frac{4\cdot 1\cdot 4 - 12\cdot 2}{7} rad/s = -\frac{8}{7} rad/s$$

Το αποτέλεσμα δείχνει ότι μετά την πρόσδεση η ράβδος στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, με αποτέλεσμα το κέντρο μάζας Ο, να έχει ταχύτητα όπως στο διπλανό σχήμα, με μέτρο:

$$\upsilon_2 = \omega_2 R_2 = \omega_2 \frac{\ell}{4} = \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{4} m/s = \frac{2}{7} m/s$$

ii) Η κινητική ενέργεια της ράβδου πριν την πρόσδεση στον άξονα Κ, είναι ίση:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_A \omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4}\right)\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M\ell^2\right)\omega_1^2$$

Ενώ αμέσως μετά:

$$K_2 = \frac{1}{2} I_K \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{16}\right)\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{48}M\ell^2\right)\omega_2^2$$

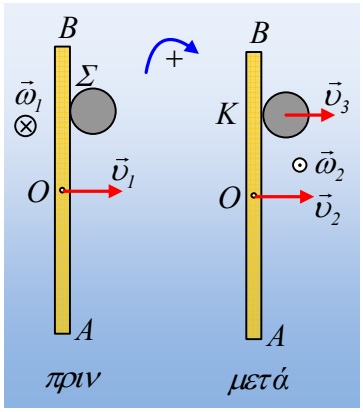
Συνεπώς η **απώλεια** της κινητικής ενέργειας της ράβδου είναι:

$$\Delta K = K_1 - K_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M\ell^2\right)\omega_1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{48}M\ell^2\right)\omega_2^2 \rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}M\ell^2\left(\frac{\omega_1^2}{3} - \frac{7\omega_2^2}{48}\right) = \frac{1}{2}3\cdot 1^2\left(\frac{4^2}{3} - \frac{7\cdot\left(\frac{8}{7}\right)^2}{48}\right)J = 7{,}7J$$

Σχόλιο:

Τι σημαίνει η ράβδος προσδένεται στον άξονα Κ; Στην πραγματικότητα έχουμε μια βίαιη πρόσδεση, που στην ουσία μπορεί να αντιμετωπισθεί σαν μια κρούση. Ας την δούμε:



Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπισθεί σαν μια κρούση της ράβδου στο σημείο Κ με ένα ακίνητο σώμα Σ, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο.

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση έχουμε:

$$M\upsilon_1 = M\upsilon_2 + m\upsilon_3 \quad (1)$$

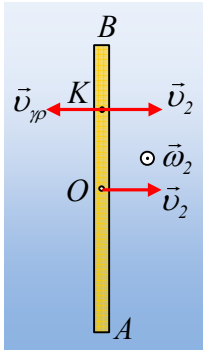
όπου m η μάζα του σώματος Σ που συγκρούεται και υ_3 η ταχύτητά του μετά την κρούση.

Παίρνοντας τώρα την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων, ως προς άξονα που περνά από το Ο έχουμε:

$$I_o\omega_1 = -I_o\,\omega_2 + m\upsilon_3 \cdot \frac{\ell}{4} \quad (2)$$

Εξάλλου, η ταχύτητα του σημείου Κ της ράβδου, μετά την κρούση είναι μηδέν, αφού εκεί περνά ο σταθερός άξονας ως προς τον οποίο θα αρχίσει η νέα περιστροφή της ράβδου.

Αυτό όμως σημαίνει ότι η γραμμική ταχύτητα του Κ πρέπει να είναι αντίθετη της μεταφορικής ταχύτητας του κέντρου μάζας υ_2, όπως στο σχήμα.



Αλλά $\upsilon_{\gamma\rho/K} = \omega_2 \cdot \frac{\ell}{4}$ όπου η γωνιακή ταχύτητα θα έχει αντίθετη φορά από την αρχική, οπότε $4\upsilon_2 = \omega_2 \cdot \ell$.

Λύνοντας ως προς $m\upsilon_3$ την (1) και αντικαθιστώντας στην (2) παίρνουμε:

$$\frac{1}{12}M\ell^2\omega_1 = -\frac{1}{12}M\ell^2\omega_2 + M(\upsilon_1 - \upsilon_2)\frac{\ell}{4} \text{ ή}$$

$$\ell\omega_1 = -\ell\omega_2 + 3(\upsilon_1 - \upsilon_2) \text{ ή}$$

$$\ell\omega_1 = -4\upsilon_2 + 3\upsilon_1 - 3\upsilon_2$$

$$\upsilon_2 = \frac{3\upsilon_1 - \ell\omega_1}{7} = \frac{3\cdot 2 - 1\cdot 4}{7} m/s = \frac{2}{7} m/s$$

dmargaris@gmail.com