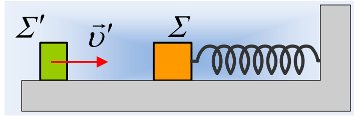
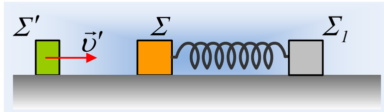
Μια κρούση και τα έργα της δύναμης του ελατηρίου





Ένα σώμα Σ μάζας m=1kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε κατακόρυφο τοίχο, όπως στο πρώτο σχήμα.

Σε μια στιγμή (t=0) ένα δεύτερο σώμα Σ΄ μάζας 0,5kg κινούμενο κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, με ταχύτητα υ΄=3m/s συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Σ. Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

i) Ποια χρονική στιγμή t_1 θα μηδενιστεί για πρώτη φορά η ταχύτητα του Σ και σε πόση απόσταση από την αρχική του θέση θα συμβεί αυτό; Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης του ελατηρίου στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια κρούση, αλλά τώρα το δεξιό άκρο του ελατηρίου δεν έχει δεθεί σε τοίχο, αλλά σε ένα σώμα $Σ_1$ μάζας m, όπως στο 2^o σχήμα. Αν κάποια στιγμή t_2 τα σώματα Σ και $Σ_1$ έχουν ίσες ταχύτητες:

ii) Ποιο το μέτρο της ταχύτητας των Σ και $Σ_1$ τη στιγμή t_2; Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης του ελατηρίου που ασκείται σε κάθε σώμα, στο χρονικό διάστημα 0-t_2, όπως και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τη στιγμή t_2. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου τη στιγμή αυτή;

iii)* Ποια χρονική στιγμή θα μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητα του σώματος Σ; Να γίνει η γραφική παράσταση υ=υ(t) της ταχύτητας του σώματος Σ σε συνάρτηση με το χρόνο, μετά την κρούση.

* Το iii) ερώτημα δεν απευθύνεται σε μαθητές.

Απάντηση.

i) Η ταχύτητα του σώματος Σ μετά την κρούση έχει μέτρο:

$$\upsilon = \frac{2m'}{m+m'}\upsilon' = \frac{2\cdot 0,5}{1+0,5}3m/s = 2m/s$$

Με φορά προς τα δεξιά.

Αλλά τότε το Σ ξεκινά μια απλή αρμονική ταλάντωση, από την θέση ισορροπίας του, με γωνιακή συχνότητα $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}}rad/s = 10rad/s$ και με πλάτος Α, όπου υ=ω·Α → Α=0,2m, με αποτέλεσμα να μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητά του, τη στιγμή που φτάνει σε ακραία θέση (θέση πλάτους) τη στιγμή t_1, όπου:

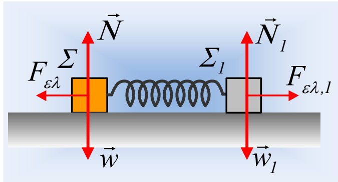
$$t_1 = \frac{1}{4}T' = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega'} = \frac{\pi}{20}s$$

Η δύναμη του ελατηρίου, είναι μια συντηρητική δύναμη, οπότε το έργο της είναι:

$$W_{F_{ελ}} = -\Delta U = U_{αρχ} - U_{τελ} = 0 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = -\frac{1}{2}100\cdot 0,2^2 J = -2J$$

Προφανώς κάποιος θα μπορούσε να εφαρμόσει για το σώμα Σ το Θ.Μ.Κ.Ε. και να υπολογίσει το παραπάνω έργο, που δεν είναι τίποτα άλλο από την ενέργεια που αφαιρέθηκε, μέσω του έργου της F, από το σώμα Σ. Η ενέργεια αυτή προφανώς είναι ίση με την αρχική κινητική ενέργεια του σώματος η οποία έχει μετατραπεί σε δυναμική.

ii) Μετά την κρούση το σώμα Σ κινούμενο προς τα δεξιά συσπειρώνει το ελατήριο, με αποτέλεσμα αυτό να ασκεί στα δυο σώματα τις δυνάμεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, με ίσα μέτρα. Το αποτέλεσμα θα είναι το σώμα Σ να επιβραδύνεται ενώ το $Σ_1$ να επιταχύνεται. Προφανώς για την ελαστική κρούση τα πράγματα είναι ίδια, άρα το σώμα Σ ξεκινά να συσπειρώνει το ελατήριο με αρχική ταχύτητα υ=2m/s. Στη διάρκεια της συσπείρωσης το σύστημα των σωμάτων Σ-$Σ_1$-ελατήριο είναι μονωμένο και από τη διατήρηση της ορμής παίρνουμε:



$$\vec{P}_{αρχ} = \vec{P}_{τελ} \rightarrow mυ = mu + mu \rightarrow u = \frac{mυ}{2m} = \frac{2}{2} m/s = 1m/s$$

Όπου u η κοινή ταχύτητα των δύο σωμάτων τη στιγμή t_2.

Εφαρμόζοντας εξάλλου για κάθε σώμα χωριστά το Θ.Κ.Κ.Ε. από t=0 έως τη στιγμή t_2, παίρνουμε:

Σώμα Σ: $K_{τελ}$-$K_{αρχ}$=W_w+W_N+$W_{Fελ}$ όπου W_w=W_N=0, οπότε:

$$W_{F_{ελ}} = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mυ^2 = \frac{1}{2}1\left(1^2 - 2^2\right)J = -1,5J$$

Σώμα $Σ_1$: $K_{τελ}$-$K_{αρχ}$=W_{w1}+W_{N1}+$W_{Fελ,1}$ όπου W_{w1}=W_{N1}=0, οπότε:

$$W_{F_{ελ,1}} = \frac{1}{2}mu^2 - 0 = \frac{1}{2}1 \cdot 1^2\, J = 0,5J$$

Τι μας λένε τα παραπάνω αποτελέσματα. Το ελατήριο αφαίρεσε (πήρε) από το Σ ενέργεια 1,5J και έδωσε στο $Σ_1$ ενέργεια 0,5J, στο χρονικό διάστημα 0-t_2. Αλλά τότε έχει «κερδίσει» ενέργεια 1,5J-0,5J=1J και τόση θα είναι και η δυναμική του ενέργεια.

Εναλλακτικά θα μπορούσε κάποιος να εφαρμόσει για το σύστημα Σ-$Σ_1$-ελατήριο τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, γράφοντας:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mυ^2 + 0 = 2 \cdot \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}k(Δ\ell)^2 \rightarrow$$

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k(Δ\ell)^2 = \frac{1}{2}mυ^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}mu^2 = 1J$$

Εξάλλου για το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, έχουμε:

$$W_{F_{ελ}} = -ΔU \rightarrow$$

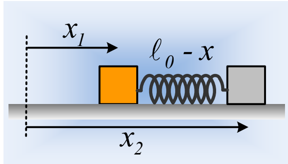
$$\frac{ΔU_{ελ}}{Δt} = -\left(P_{F_{ελ}} + P_{F_{ελ},1}\right) = -\left(F_{ελ}u \cdot συν180^o + F_{ελ}u \cdot συν0^o\right) = 0$$

iii) Ας εξετάσουμε τι κίνηση κάνουν δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 που συνδέονται από ένα ελατήριο.

Εφαρμόζουμε για κάθε σώμα το 2^o νόμο του Νεύτωνα, τη στιγμή που το ελατήριο έχει κάποια συσπείρωση x και παίρνουμε:

$$-kx=m_1\cdot\alpha_1 \ (1)$$

$$+kx=m_2\cdot\alpha_2 \ (2)$$



Πολλαπλασιάζουμε την (1) με m_2 και την (2) με m_1 και με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$-k(m_1+m_2)x=m_1m_2(\alpha_1-\alpha_2) \text{ ή}$$

$$m_1m_2\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{d^2x_2}{dt^2}\right)+(m_1+m_2)kx=0$$

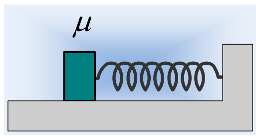
Αλλά $x_2-x_1=\ell_o\text{-}x \rightarrow \dfrac{dx_2}{dt}-\dfrac{dx_1}{dt}=-\dfrac{dx}{dt}\rightarrow\dfrac{d^2x_1}{dt^2}-\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=\dfrac{d^2x}{dt_2}\rightarrow$

$$m_1m_2\frac{d^2x}{dt^2}+(m_1+m_2)kx=0 \text{ ή}$$

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

Θέτοντας τώρα $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}=\dfrac{m}{2}$, όπου μ η **ανηγμένη μάζα** του συστήματος παίρνουμε:

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$



Η παραπάνω διαφορική εξίσωση, είναι της ίδιας μορφής με τη γνωστή μας εξίσωση που περιγράφει την ΑΑΤ, οπότε κατά αναλογία θα έχουμε:

$$x=A_1\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$$

όπου $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}=\sqrt{\dfrac{2k}{m}}=10\sqrt{2}rad/s$ ενώ για t=0, x=0, οπότε $\varphi_o=0$ και

$\upsilon=\omega A_1 \rightarrow A_1=\dfrac{\upsilon}{\omega}=\dfrac{2}{10\sqrt{2}}m=0{,}1\sqrt{2}m$ και η εξίσωση γίνεται:

$$x=0{,}1\sqrt{2}\eta\mu\left(10\sqrt{2}t\right) \ \text{(S.I.)}$$

Παρατηρούμε δηλαδή το ελατήριο να συσπειρώνεται και να επιμηκύνεται αρμονικά με το χρόνο, όπως θα το έκανε, αν το ένα του άκρο ήταν σταθερό και στο άλλο του άκρο υπήρχε υποθετικό σώμα, με μάζα ίση με την **ανηγμένη μάζα** του συστήματος:

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}=\frac{m}{2}.$$

Το κέντρο μάζας C του συστήματος, προφανώς είναι το μέσον του ελατηρίου, αφού οι μάζες είναι ίσες. Στη διάρκεια της κίνησης, ας πάρουμε έναν παρατηρητή Π, που «κάθεται» στο κέντρο μάζας C. Αυτός είναι αδρανειακός και κινείται με ταχύτητα $\upsilon_{cm} = \frac{m_1 \upsilon}{m_1 + m_2} = \frac{m\upsilon}{2m} = 1m/s$.

Αλλά τότε ο παρατηρητής Π, έχει δίπλα του ένα μονωμένο σύστημα δύο σωμάτων για το οποίο ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0$$

Προσοχή, *μιλάμε για τις ταχύτητες των δύο σωμάτων, όπως τις μετράει ο παρατηρητής που συμμετέχει στην κίνηση του κέντρου μάζας C.*

Έτσι τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση, βλέπει το σώμα Σ να ξεκινά μια ταλάντωση από τη θέση ισορροπίας του στο άκρο ενός ελατηρίου (μισού μήκους) και σταθεράς k΄=2k με μέγιστη ταχύτητα $v_{max}=\upsilon-\upsilon_{cm}=1m/s$ προς τα δεξιά, ενώ το Σ_1 εκτελεί μια δεύτερη ΑΑΤ με ελατήριο επίσης k΄=2k και μέγιστη ταχύτητα $v_{1max}=\upsilon_1-\upsilon_{cm}=0-\upsilon_{cm}=-1m/s$, με φορά προς τα αριστερά.

Αλλά τότε τα σώματα ταλαντώνονται με γωνιακή συχνότητα $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \omega$, ίση με την γωνιακή συχνότητα μεταβολής του μήκους του ελατηρίου, πράγμα αναμενόμενο, με βάση την παραπάνω ανάλυση.

Για τα πλάτη ταλάντωσης θα βρίσκει $A_1 = A_2 = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{1}{10\sqrt{2}} m = 0{,}05\sqrt{2}m$

Αλλά τότε για την απομάκρυνση του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας του, θα έβρισκε την εξίσωση (θετική φορά προς τα δεξιά):

$$x_1 = 0{,}05\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10\sqrt{2}t\right) \text{ (S.I.)}$$

Και αντίστοιχα για το σώμα Σ_1:

$$x_2 = 0{,}05\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10\sqrt{2}t + \pi\right) \quad \text{(S.I.)}$$

Όλα αυτά όμως, όπως τα βλέπει ο παρατηρητής Π στο κέντρο μάζας C, ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα δεξιά, οπότε αν φανταστούμε την κίνηση κάθε σώματος σαν σύνθετη, αποτελούμενη από δύο ανεξάρτητες κινήσεις, όπου η μία είναι η ταλάντωση που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Π και η άλλη η ευθύγραμμη ομαλή κίνηση του παρατηρητή, θα είχαμε για τις θέσεις κάθε σώματος:

Σώμα Σ:

$$x_1 = x_{01} + \upsilon_{cm} \cdot t + 0{,}05\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10\sqrt{2}t\right)$$

Σώμα Σ_1:

$$x_2 = x_{02} + \upsilon_{cm} \cdot t + 0{,}05\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10\sqrt{2}t + \pi\right)$$

Όπου x_{01} και x_{02} οι αρχικές θέσεις τους.

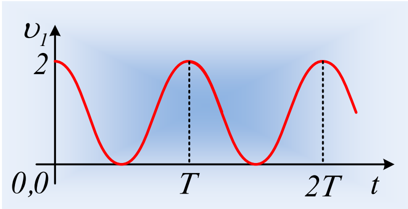
Αλλά τότε η ταχύτητα του Σ είναι ίση:

$$\upsilon_1 = \frac{dx_1}{dt} = \upsilon_{cm} + \omega A_1 \sigma\upsilon\nu\left(10\sqrt{2}t\right) = 1 + 1 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10\sqrt{2}t\right) \quad (3)$$

Τη στιγμή που μηδενίζεται για πρώτη φορά $\upsilon_1=0$, οπότε:

$$1+1\cdot\sigma\upsilon\nu\left(10\sqrt{2}t\right)=0\rightarrow\sigma\upsilon\nu\left(10\sqrt{2}t\right)=-1\rightarrow 10\sqrt{2}t_2=\pi\rightarrow t_2=\frac{\pi\sqrt{2}}{20}s.$$

Εξάλλου η γραφική παράσταση της σχέσης (3) είναι:



Με

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{10\sqrt{2}}s=\frac{\pi\sqrt{2}}{10}s.$$

Σχόλιο:

Το σώμα Σ επιβραδύνεται, λόγω συσπείρωσης του ελατηρίου, μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του. Τη στιγμή αυτή το Σ_1 έχει αποκτήσει ταχύτητα υ_2=2m/s και το ελατήριο έχει ξανά το φυσικό του μήκος.

Οπότε ο χρόνος t_2 είναι ίσος με ½ Τ, όπου Τ η περίοδος ταλάντωσης της ανοιγμένης μάζας και:

$$t_2=\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{10\sqrt{2}}s=\frac{\pi\sqrt{2}}{20}s.$$

dmargaris@gmail.com