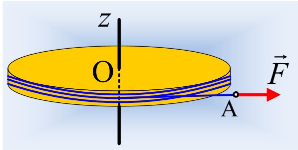
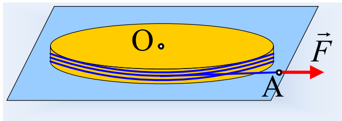
Το έργο και η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου



Ένας ομογενής δίσκος μάζας 40kg και ακτίνας 0,5m μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου και περνά από το κέντρο του Ο. Γύρω από το δίσκο τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, στο άκρο Α του οποίου, ασκούμε μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=10N.

i) Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τη στιγμή t_1 όπου το άκρο Α του νήματος έχει μετατοπισθεί κατά x_1=4m.

ii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου τη στιγμή t_1;



Απελευθερώνουμε τον παραπάνω δίσκο από τον άξονα και τον τοποθετούμε σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

iii) Να βρεθεί ξανά η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου τη στιγμή που το άκρο Α του νήματος έχει μετατοπισθεί κατά 4m.

iv) Ποιος θα είναι τώρα ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου την παραπάνω στιγμή;

v) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα μεταβάλλουμε το μέτρο της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση F=2t (S.I.), διατηρώντας σταθερή την κατεύθυνσή της. Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1=10s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου, ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του I= ½ mR^2.

Απάντηση:

i) Τη στιγμή που το άκρο του νήματος Α έχει μετατοπισθεί κατά x_1, η δύναμη F έχει παράγει έργο $W=F\cdot x_1$, το οποίο μετρά την ενέργεια που δόθηκε στο άκρο του νήματος και μέσω αυτού, στο δίσκο και η οποία εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια του δίσκου. Ισχύει λοιπόν ότι:

$$K_1 = W_{1F} \rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = Fx_1 \rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2 = Fx_1 \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4Fx_1}{mR^2}} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{Fx_1}{m}} = \frac{2}{0{,}5}\sqrt{\frac{10\cdot 4}{40}}rad/s = 4rad/s$$

ii) Τη στιγμή t_1 ένα σημείο στην περιφέρεια του δίσκου έχει ταχύτητα (γραμμική) μέτρου υ=ωR. Την ίδια ταχύτητα έχει και κάθε σημείο του νήματος, συνεπώς και το άκρο Α. Αλλά τότε ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_F}{dt} = F\cdot\upsilon = F\cdot\omega R = 10\cdot 4\cdot 0{,}5J/s = 20J/s$$

Ισοδύναμα: $\frac{dK}{dt} = P_\tau = FR\cdot\omega = 20J/s$

iii) Και στην περίπτωση αυτή δίνεται ίση ενέργεια στο δίσκο $W=F\cdot x_1=40J$, όπως και προηγουμένως. Τώρα όμως ο δίσκος θεωρούμε ότι εκτελεί σύνθετη κίνηση και η κινητική του ενέργεια δίνεται από την εξίσωση:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \quad (1)$$

Αλλά από το 2º νόμο του Νεύτωνα $\Sigma F=m\alpha_{cm} \rightarrow F=m\alpha_{cm}$ (2) και

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow FR= \tfrac{1}{2}\, mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow 2F=mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \; (3)$$

Αλλά τότε κάθε στιγμή θα ισχύει:

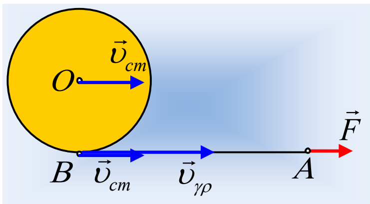
$$\frac{\omega}{\upsilon_{cm}} = \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu}t}{\alpha_{cm}t} = \frac{2F/mR}{F/m} = \frac{2}{R} \rightarrow \boxed{\omega R = 2\upsilon_{cm}} \quad (4)$$

και $K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}m\frac{\omega^2R^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{3}{8}mR^2\omega^2$, οπότε έχουμε:

$$K = W_F \rightarrow \frac{3}{8}mR^2\omega^2 = Fx_1 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{8Fx_1}{3mR^2}} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{2Fx_1}{3m}} \rightarrow$$

$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{2Fx_1}{3m}} = \frac{2}{0{,}5}\sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 4}{3\cdot 40}}rad/s \approx 3{,}27 rad/s$$

iv) Κάθε σημείο του νήματος, συνεπώς και το άκρο Α, έχει την ίδια ταχύτητα με το σημείο Β του δίσκου, στο σχήμα (σε κάτοψη). Αλλά:



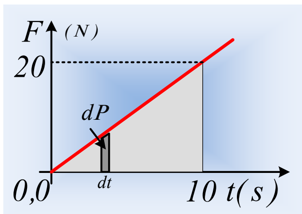
$$\upsilon_B=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}= \tfrac{1}{2}\,\omega R +\omega R = \frac{3}{2}\omega R$$

Οπότε για το ζητούμενο ρυθμό έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_F}{dt} = F\cdot\upsilon_A = \frac{3}{2}F\cdot\omega R = \frac{3}{2}10\cdot 3{,}27\cdot 0{,}5 J/s = 24{,}5 J/s$$

v) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για τη σύνθετη κίνηση του δίσκου παίρνουμε:

- Μεταφορική κίνηση: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \Sigma\vec{F} \rightarrow dP = Fdt \rightarrow$

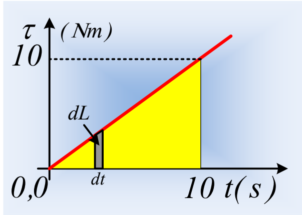


Κάνουμε το διάγραμμα F-t όπως στο διπλανό σχήμα, όπου το εμβαδόν του γκρι τριγώνου είναι αριθμητικά ίσο με τη μεταβολή της ορμής του κέντρου μάζας. Έτσι παίρνουμε:

$P_\tau - P_{\alpha\rho\chi} = \tfrac{1}{2}\, 10\cdot 20 kg\cdot m/s=100\ kg\cdot m/s$ ή

$$P_\tau = 100 kg\cdot m/s \rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{P_\tau}{m} = \frac{100}{40}m/s = 2{,}5 m/s$$

- Στροφική κίνηση: $\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \rightarrow dL = FRdt \rightarrow$



Όπου η ασκούμενη ροπή είναι τώρα μεταβλητή τ=F·R=2t·0,5=t (S.I.), οπότε κάνοντας ομοίως το διάγραμμα τ-t, το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου είναι αριθμητικά ίσο με τη συνολική μεταβολή της στροφορμής.

$L_\tau - L_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}\, 10\cdot 10 kg\cdot m/s = 50\ kg\cdot m^2/s$ ή

$$L_\tau = 50kg\cdot m^2/s \to \omega = \frac{L_\tau}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{50}{\frac{1}{2}40\cdot 0,5^2} rad/s = 10rad/s$$

Με βάση τις τιμές που βρήκαμε, η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}40\cdot 2,5^2 J + \frac{1}{2}\frac{1}{2}40\cdot 0,5^2\cdot 10^2 J = 125J + 250J \to$$

$$K = 375J$$

Σχόλιο.

Η σχέση (4) ισχύει και στην περίπτωση μεταβλητής δύναμης συνδέοντας την υ_{cm} και την ω κάθε στιγμή ανεξάρτητα της δύναμης (και ροπής) που ασκείται, αρκεί η δύναμη να δρα εφαπτομενικά. Έτσι θα μπορούσαμε να αποφύγουμε να δουλέψουμε στο τελευταίο ερώτημα δυο φορές με διάγραμμα, αφού αν υπολογίσουμε π.χ. την ταχύτητα υ_{cm}=2,5m/s, θα έχουμε:

$$\omega R = 2\upsilon_{cm} \to \omega = \frac{2\upsilon_{cm}}{R} = \frac{2\cdot 2,5}{0,5} rad/s = 10rad/s$$

dmargaris@gmail.com