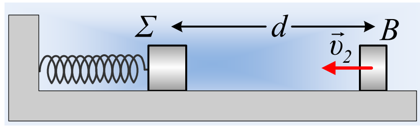
Ενέργειες ταλάντωσης, μετά από κρούσεις.



Το σώμα Σ, μάζας M=1kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=40N/m. Το σώμα Β, μάζας m=0,5kg κινείται με ταχύτητα υ_2=3m/s, πάνω στον άξονα του ελατηρίου, με κατεύθυνση προς το Σ. Εκτρέπουμε το Σ προς τα αριστερά, συσπειρώνοντας το ελατήριο κατά Δℓ=0,2m και σε μια στιγμή t_0=0, όπου η απόσταση των δύο σωμάτων είναι d, το αφήνουμε να ταλαντωθεί. Τα δυο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά τη χρονική στιγμή t_1=0,5s.

i) Να υπολογιστεί η αρχική απόσταση d μεταξύ των δύο σωμάτων.

ii) Να βρεθεί η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ, μετά την κρούση.

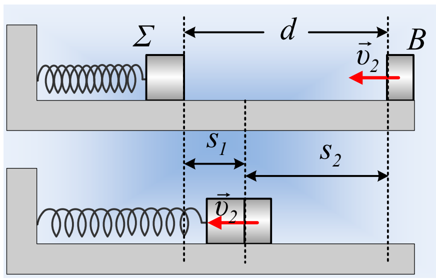
iii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα αφήνουμε άλλη στιγμή το σώμα Σ να ταλαντωθεί, με αποτέλεσμα ελάχιστα πριν την κρούση, να έχει ταχύτητα υ_1=0,6m/s, με φορά προς τα δεξιά. Πόση θα είναι τώρα η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ, μετά την κρούση;

vi) Ποιες οι δυνατές τιμές (αλγεβρικές) της ταχύτητας του σώματος Β, μετά την κρούση για διαφορετικές θέσεις κρούσης;

v) Να υπολογιστούν η μέγιστη και η ελάχιστη ενέργεια ταλάντωσης, την οποία μπορεί να αποκτήσει το Σ, μετά από ανάλογες κρούσεις με το σώμα Β, θεωρώντας πάντα σταθερή την ταχύτητα υ_2 του σώματος Β, πριν την κρούση.

Δίνεται $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:



i) Το σώμα Σ ξεκινά την ταλάντωσή του με μηδενική ταχύτητα, συνεπώς τη στιγμή t_0=0, βρίσκεται σε ακραία θέση και το πλάτος ταλάντωσής του θα είναι A_1=Δℓ=0,2m. Εξάλλου η περίοδος ταλάντωσης είναι ίση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{40}}s = 1s$$

Αλλά τότε τη στιγμή της κρούσης (t_1= ½ T), βρίσκεται στην δεξιά ακραία θέση της ταλάντωσής του, με μηδενική ταχύτητα, έχοντας διανύσει απόσταση s_1=2A=0,4m.

Στο ίδιο χρονικό διάστημα, το σώμα Β διανύει απόσταση $s_2=\upsilon_2 t_1=3\cdot 0{,}5$m/s=1,5m/s, οπότε με βάση και το σχήμα, η αρχική απόσταση μεταξύ των σωμάτων είναι:

$$d = s_1 + s_2 = 0{,}4m + 1{,}5m = 1{,}9m$$

ii) Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, το σώμα Σ τη στιγμή της κρούσης, απέχει από τη θέση ισορροπίας κατά x_1 =A_1=0,2m και αποκτά ταχύτητα:

$$\upsilon_1' = \frac{2m}{M+m}\upsilon_2 = \frac{2\cdot 0{,}5}{1+0{,}5}(-3)m/s = -2m/s$$

Αλλά τότε η ενέργεια της νέας ταλάντωσης που θα ξεκινήσει, είναι ίση:

$$E_{1\tau}=\frac{1}{2}Dx_1^2+\frac{1}{2}M\upsilon_1'^2=\frac{1}{2}40\cdot 0{,}2^2J+\frac{1}{2}1\cdot 2^2J=2{,}8J$$

iii) Η κρούση πραγματοποιείται τώρα σε μια άλλη θέση, με απομάκρυνση x_2, όπου από την ενέργεια ταλάντωσης πριν την κρούση παίρνουμε:

$$E=\frac{1}{2}Dx_2^2+\frac{1}{2}M\upsilon_1^2\rightarrow$$

$$U=\frac{1}{2}Dx_2^2=\frac{1}{2}kA_1^2-\frac{1}{2}M\upsilon_1^2=\frac{1}{2}40\cdot 0{,}2^2J-\frac{1}{2}1\cdot 0{,}6^2J=0{,}62J$$

Ενώ η ταχύτητα του σώματος Σ μετά την νέα κρούση, έχει τιμή:

$$\upsilon_1''=\frac{M-m}{M+m}\upsilon_1+\frac{2m}{M+m}\upsilon_2=\frac{1-0{,}5}{1+0{,}5}0{,}6m/s+\frac{2\cdot 0{,}5}{1+0{,}5}(-3)m/s=-1{,}8m/s$$

Συνεπώς η ενέργεια της νέας ταλάντωσης (η απομάκρυνση δεν μεταβάλλεται στη διάρκεια της κρούσης) θα είναι:

$$E_{2\tau}=\frac{1}{2}Dx_2^2+\frac{1}{2}M\upsilon_1''^2=0{,}62J+\frac{1}{2}1\cdot 1{,}8^2J=2{,}24J$$

iv) Αν ελάχιστα πριν την κρούση το σώμα Σ έχει ταχύτητα υ_1, τότε το σώμα Β θα αποκτήσει ταχύτητα μετά την κρούση:

$$\upsilon_2'=\frac{2M}{M+m}\upsilon_1+\frac{m-M}{M+m}\upsilon_2=\frac{2\cdot 1}{1+0{,}5}\upsilon_1+\frac{0{,}5-1}{1+0{,}5}(-3)=\frac{4}{3}\upsilon_1+1\quad \text{(S.I.)}\quad (1)$$

Όμως για την αρχική ταλάντωση του Σ, έχουμε ότι $x=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$, όπου για t=0, x=-A, οπότε:

$$-A=A\cdot\eta\mu\varphi_0\rightarrow\ \varphi_0=\frac{3\pi}{2}\ \varepsilon\nu\acute{\omega}\ \ \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\ rad/s.$$

Αλλά τότε η ταχύτητα πριν την κρούση θα δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon_1=\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\left(2\pi t+\frac{3\pi}{2}\right)=\omega A\cdot\eta\mu(2\pi t)=0{,}4\pi\cdot\eta\mu(2\pi t)$$

όπου t η χρονική στιγμή της κρούσης. Έτσι η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\upsilon_2'=\frac{4}{3}0{,}4\pi\cdot\eta\mu(2\pi t)+1=1+\frac{8}{15}\pi\cdot\eta\mu(2\pi t)\quad \text{(S.I.)}\quad (2)$$

Αλλά τότε, η μέγιστη δυνατή ταχύτητα του σώματος Β είναι:

$$\upsilon_{2max}'=1+\frac{8}{15}\pi\approx 2{,}67m/s$$

ενώ η ελάχιστη:

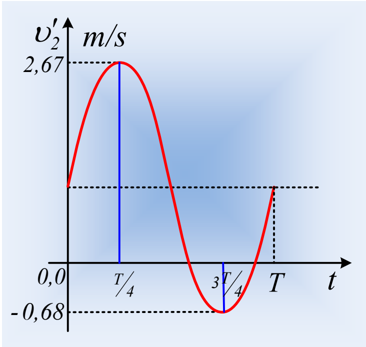
$$\upsilon_{2min}'=1-\frac{8}{15}\pi\approx -0{,}68m/s$$

Προφανώς το σώμα Β μπορεί να αποκτήσει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές ταχύτητας, δηλαδή:

$$-0{,}68m/s\le\upsilon_2'\le 2{,}67m/s$$

Σημείωση:

Αν κάναμε τη γραφική παράσταση της εξίσωσης (2) θα παίρναμε τη καμπύλη του διπλανού σχήματος. Εύκολα μπορεί κάποιος να διαπιστώσει, ότι το σώμα Β αποκτά τη μέγιστη ταχύτητά του, αν συγκρουστεί με το Σ, καθώς αυτό περνά από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα δεξιά (τη στιγμή t= ¼ T), ενώ αποκτά την ελάχιστη (αλγεβρικά) ταχύτητα, στην περίπτωση που η κρούση γίνει ξανά στη θέση ισορροπίας, αλλά τα δυο σώματα κινούνται προς τα αριστερά. Στην δεύτερη περίπτωση ας σημειωθεί ότι το Β δεν αλλάζει φορά κίνησης!



Υπάρχουν προφανώς και δυο θέσεις (στα σημεία που η καμπύλη τέμνει τον άξονα των χρόνων) όπου αν συμβεί κρούση, το σώμα Β ακινητοποιείται.

v) Με βάση τα παραπάνω, την μεγαλύτερη ταχύτητα (αλγεβρική τιμή, αλλά προφανώς και μέτρο) το σώμα Β την αποκτά, όταν συγκρούεται στη θέση ισορροπίας του Σ, το οποίο κινείται αντίθετα. Αλλά στην περίπτωση αυτή, έχοντας κρατήσει τη μεγαλύτερη δυνατή κινητική ενέργεια, σημαίνει ότι έχει μεταφέρει στο Σ, την ελάχιστη ενέργεια. Αλλά τότε το Σ θα έχει και την ελάχιστη ενέργεια ταλάντωσης μετά την κρούση. Πόση είναι αυτή; Υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος Σ, στην περίπτωση που η κρούση πραγματοποιείται στη θέση ισορροπίας, ενώ αυτό κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $\upsilon_1=\omega A_1=0{,}4\pi$ m/s:

$$\upsilon_1' = \frac{M-m}{M+m}\upsilon_1 + \frac{2m}{M+m}\upsilon_2 = \frac{1-0{,}5}{1+0{,}5}0{,}4\pi\ m/s + \frac{2\cdot 0{,}5}{1+0{,}5}(-3)m/s = -1{,}58m/s$$

Οπότε έχουμε:

$$E_{\tau,min} = \frac{1}{2}M\upsilon_1'^2 = \frac{1}{2}1\cdot 1{,}58^2\,J = 1{,}25J$$

Την ελάχιστη ενέργεια μετά την κρούση, το σώμα Β την έχει όταν μηδενιστεί η ταχύτητά του. Αλλά τότε θα έχει μεταφέρει όλη την κινητική του ενέργεια στο σώμα Σ, το οποίο και θα ταλαντωθεί με μέγιστη ενέργεια ταλάντωσης, ίση με:

$$E_{\tau,max} = E_{\alpha\rho\chi} + K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}DA_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 \rightarrow$$

$$E_{\tau,max} = \frac{1}{2}40\cdot 0{,}2^2\,J + \frac{1}{2}0{,}5\cdot 3^2\,J = 3{,}05J$$

Σχόλιο:

Από την εξίσωση (1) θέτοντας $\upsilon_2'=0$, παίρνουμε:

$$\upsilon_2' = \frac{2M}{M+m}\upsilon_1 + \frac{m-M}{M+m}\upsilon_2 = \frac{4}{3}\upsilon_1 + 1 = 0 \rightarrow\ \upsilon_1 = -\frac{3}{4}m/s$$

Έτσι η ταχύτητα που αποκτά το σώμα Σ μετά την κρούση είναι:

$$\upsilon_1' = \frac{M-m}{M+m}\upsilon_1 + \frac{2m}{M+m}\upsilon_2 = \frac{1-0{,}5}{1+0{,}5}(-0{,}75)m/s + \frac{2\cdot 0{,}5}{1+0{,}5}(-3)m/s = -2{,}25m/s$$

Αλλά από την ενέργεια ταλάντωσης πριν την κρούση έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}Dx_3^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$U_1 = \frac{1}{2}Dx_3^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 - \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}40 \cdot 0{,}2^2\,J - \frac{1}{2}1 \cdot 0{,}75^2\,J \approx 0{,}52J$$

Συνεπώς η μέγιστη ενέργεια ταλάντωσης του Σ είναι:

$$E_{\tau,max} = U_1 + \frac{1}{2}M\upsilon_1'^2 = 0{,}52J + \frac{1}{2}1 \cdot 2{,}25^2\,J = 3{,}05J$$

dmargaris@gmail.com