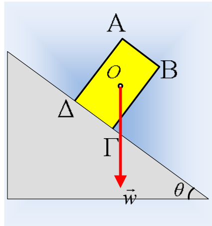
Για να μην χάσουμε τα συμπεράσματα.



Η τομή ενός ομογενούς στερεού s είναι ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές (ΑΒ)=2α και (ΑΔ)=3α. Αφήνουμε το στερεό σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8. Να εξετάσετε αν το στερεό θα ανατραπεί, όταν για το συντελεστή τριβής μεταξύ του στερεού s και του επιπέδου, ισχύει:

i) $\mu=\mu_s=0$

ii) $\mu=\mu_s=0{,}4$

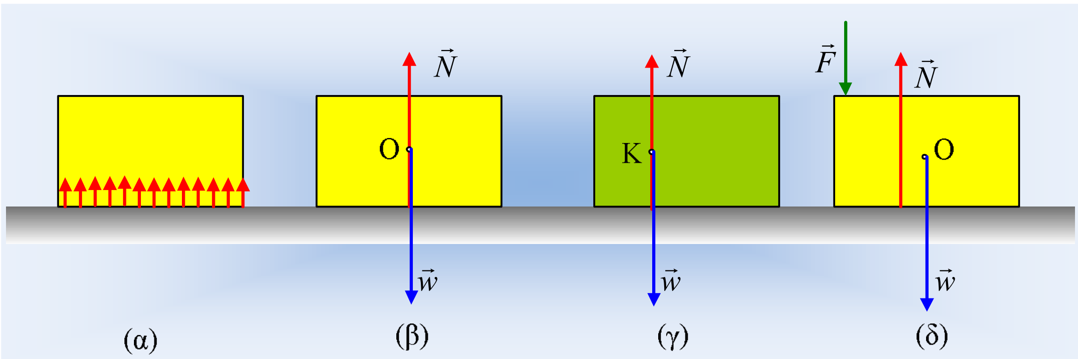
iii) $\mu=\mu_s=0{,}8$.

Απάντηση:

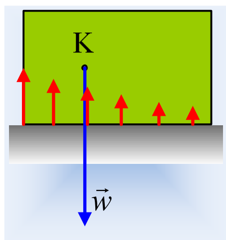
Αρχικά λίγη θεωρία….

Οι παρακάτω θέσεις είναι γραμμένες κάτω από τη συζήτηση «Η πρόταση, είναι σωστή ή λανθασμένη;»:

Ας διερευνήσουμε τι σημαίνει κάθετη αντίδραση του επιπέδου ή δύναμη στήριξης. Αυτή δεν είναι μία δύναμη, με ένα ορισμένο σημείο εφαρμογής, αλλά η συνισταμένη πολλών παραλλήλων δυνάμεων, που ασκούνται στη βάση στήριξης από το επίπεδο σχήμα (α).



Αλλά αν έχουμε ένα ομογενές στερεό (β), έναν κύλινδρο, ο οποίος ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, τότε από την συνθήκη ισορροπίας $\Sigma\tau_O=0$, βρίσκουμε ότι ο φορέας της Ν διέρχεται από το κέντρο μάζας Ο, που είναι και το γεωμετρικό κέντρο του κυλίνδρου.

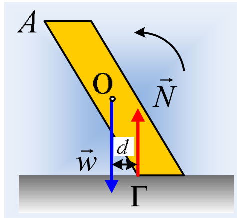


Αν βέβαια το στερεό δεν είναι ομογενές (σχήμα γ), όπου το κέντρο μάζας Κ δεν ταυτίζεται με το γεωμετρικό κέντρο βάρους, η ίδια συνθήκη ισορροπίας επιβάλει και ο φορέας της Ν να διέρχεται από το Κ. Για να συμβεί βέβαια αυτό θα πρέπει η κατανομή των συνιστωσών, να είναι όπως στο διπλανό σχήμα και όχι όπως στο σχήμα (α).

Στο σχήμα (γ) ο κύλινδρος είναι ομογενής, αλλά ασκείται πάνω του και κάποια άλλη κατακόρυφη δύναμη F. Η συνθήκη ισορροπίας επιβάλει ο φορέας της συνισταμένης των παραλλήλων δυνάμεων, η N, να μην διέρχεται από το μέσον της βάσης, αλλά να είναι μετατοπισμένη, όπως στο σχήμα, αφού και πάλι θα πρέπει $\Sigma_{\tau O}=0$.

i) Ας έρθουμε τώρα στην τοποθέτηση του σώματος Α στο οριζόντιο επίπεδο.

α) Έστω ότι το επίπεδο είναι λείο.

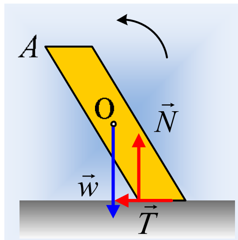


Οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται πάνω του είναι το βάρος και η δύναμη στήριξης N. Αν θα ισορροπούσε το σώμα, θα έπρεπε ο φορέας της N να μετατοπιζόταν προς τα αριστερά για να περάσει από το κέντρο μάζας Ο, πράγμα που προφανώς δεν μπορεί να συμβεί. Η πιο ακραία θέση είναι να ασκηθεί στο άκρο της ακμής Γ.

Αλλά τότε αν πάρουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση, ως προς το κέντρο μάζας Ο, θα έχουμε:

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow N\cdot d=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

Όπου d ο μοχλοβραχίονας της N ως προς το κέντρο μάζας Ο. Προφανώς η εξίσωση (1) προβλέπει γωνιακή επιτάχυνση αντιωρολογιακής φοράς και το στερεό αρχίζει να ανατρέπεται.



β) Αν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ του σώματος και του επιπέδου, τότε εκτός από τις παραπάνω δυνάμεις θα κάνει και την εμφάνισή της δύναμη τριβής, όπως στο σχήμα, αφού η ύπαρξη ροπής ως προς το κέντρο μάζας Ο δεν επιτρέπει ισορροπία. Τι κάνει το σώμα;

- Το σώμα δεν μπορεί να ισορροπεί, αφού $\Sigma F_x \neq 0$.
- Αν υποθέσουμε ότι το σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση προς τα αριστερά, τότε θα είχαμε την τριβή ολίσθησης, να επιταχύνει το σώμα, προσδίδοντάς του κινητική ενέργεια και ταυτόχρονα θα είχαμε και μηχανική ενέργεια να μετατρέπεται σε θερμική. Ακραία περίπτωση παραβίασης της διατήρησης της ενέργειας.
- Δεν μένει παρά να δεχτούμε ότι το σώμα ανατρέπεται. Από εκεί και πέρα:
  -αν έχουμε μικρό συντελεστή τριβής, θα έχουμε σύνθετη κίνηση (ολίσθηση και ανατροπή).
  - Με αρκούντως μεγάλο συντελεστή τριβής, θα μπορούσαμε να έχουμε μόνο περιστροφή, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από την κάτω αριστερά κορυφή.

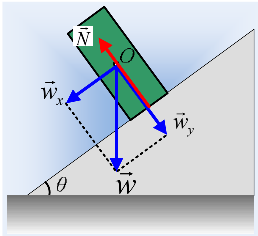
Συμπέρασμα:

Αν αφεθεί ένα στερεό σώμα σε οριζόντιο επίπεδο, όπως το σώμα Α στο σχήμα που δόθηκε, και, το βάρος δεν περνά από τη βάση στήριξης, τότε το στερεό θα ανατραπεί.

Από κει και πέρα, αν η ασκούμενη τριβή θα είναι στατική (πράγμα που σημαίνει ότι το στερεό θα περιστραφεί ως προς οριζόντιο άξονα που περνά από το Γ) ή θα είναι τριβή ολίσθησης, οπότε η κίνηση θα είναι σύνθετη, είναι θέμα που θα επιλυθεί ανά περίπτωση.

ii) Ερχόμαστε στην περίπτωση που ένας κύλινδρος αφήνεται σε κεκλιμένο επίπεδο.

A) Έστω ότι **το επίπεδο είναι λείο**.



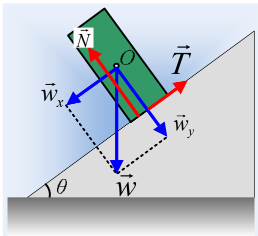
Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι αυτές του διπλανού σχήματος.

Το κεκλιμένο επίπεδο «πιέζεται» εξαιτίας της συνιστώσας w_y ομοιόμορφα. Έτσι με βάση τα σχήματα (α) και (β) της αρχικής ανάλυσης, η κατανομή των δυνάμεων στήριξης είναι ομοιόμορφη και η κάθετη αντίδραση Ν περνά από το κέντρο μάζας Ο. Δεν έχουμε μετατόπιση του φορέα της δύναμης στήριξης!

Αλλά τότε δεν ασκείται κάποια ροπή ως προς το κέντρο μάζας και ο κύλινδρος δεν θα αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση και δεν θα ανατραπεί!

Τι θα κάνει ο κύλινδρος; Θα επιταχυνθεί και θα εκτελέσει μεταφορική επιταχυνόμενη κίνηση κατά μήκος του επιπέδου.

B) **Αναπτύσσεται τριβή.**



Τότε η τριβή θα έχει φορά προς τα πάνω (με βάση την προηγούμενη περίπτωση, ο κύλινδρος τείνει να κινηθεί προς τα κάτω, οπότε τότε εμφανίζεται η τριβή).

Αλλά η παρουσία της τριβής, έχει ως αποτέλεσμα να ασκηθεί στον κύλινδρο ροπή αριστερόστροφη, ως προς το κέντρο μάζας Ο η οποία τείνει να τον ανατρέψει. Για να μην συμβεί αυτό, εμφανίζεται μετατόπιση του φορέα της Ν, όπως στο σχήμα.

Τι θα έχουμε;

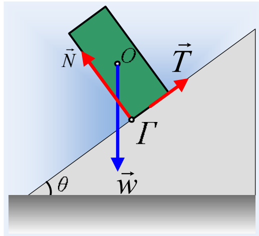
Ανάλογα με την κλίση του επιπέδου, το συντελεστή τριβής, αλλά και τα γεωμετρικά στοιχεία του κυλίνδρου, μπορεί:

B_1) **Η τριβή να είναι στατική**. Τότε:

α) Αν η ροπή της Ν, η οποία μπορεί να αποκτήσει μέγιστο μέτρο $\tau_{max}=N\cdot R$, (Η Ν μεταφέρεται και ασκείται στο άκρο μιας ακμής), μπορεί να εξουδετερώσει τη ροπή της στατικής τριβής, τότε ο κύλινδρος ισορροπεί. Πρέπει δηλαδή να ισχύει:

$$N\cdot R=T_s\cdot \tfrac{1}{2}\, h$$

Όπου h το ύψος του κυλίνδρου.



β) Αν δεν μπορεί να συμβεί το παραπάνω, αν δηλαδή ισχύει:

$$T_{op}\cdot ½\, h > N\cdot R$$

ο κύλινδρος αρχίζει να ανατρέπεται, αφού η ροπή της στατικής τριβής υπερισχύει, προσδίνοντας μια γωνιακή επιτάχυνση αντιωρολογιακής φοράς στον κύλινδρο, ο οποίος αρχίζει να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της ακμής του Γ.

B_2) Αν η τριβή είναι **τριβή ολίσθησης** (πράγμα που θα συμβαίνει αν mgημθ>T_{op}), τότε θα πρέπει να συγκρίνουμε ξανά τη ροπή της τριβής με την μέγιστη δυνατή ροπή της Ν, ως προς το κέντρο μάζας Ο.

α) Αν για τα μέτρα των δύο ροπών, ως προς το κέντρο μάζας Ο, ισχύει:

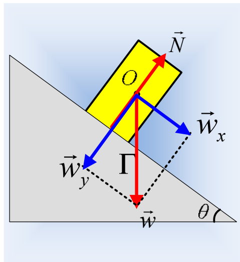
$$\tau_T \leq \tau_{Nmax} \rightarrow \mu N\cdot ½\, h \leq N\cdot R \rightarrow \ \mu \leq \frac{2R}{h}$$

τότε η Ν δεν φτάνει στην ακμή του κυλίνδρου, οπότε ο φορέας της απέχει απόσταση d<R και ο κύλινδρος εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση κατά μήκος του επιπέδου.

β) Σε αντίθετη περίπτωση, μαζί με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και την ολίσθηση θα έχουμε τον κύλινδρο να αποκτά και γωνιακή επιτάχυνση και να ανατρέπεται, εκτελώντας σύνθετη κίνηση.

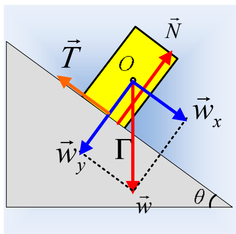
Και τώρα ας έρθουμε στην αρχική εφαρμογή μας και στα ερωτήματα που θέτει:

i) Αν το επίπεδο είναι λείο, τότε οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό μας, είναι αυτές του διπλανού σχήματος. Αλλά τότε $\Sigma\tau_o=0$ και το ορθογώνιο δεν ανατρέπεται, αλλά εκτελεί μόνο μεταφορική επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση:



$$\alpha = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{mg\eta\mu\varphi}{m} = g\eta\mu\varphi$$

ii) Αν $\mu=\mu_s= 0{,}4$, τότε έχουμε το διπλανό σχήμα.



- Υποθέτουμε ότι το ορθογώνιο ισορροπεί. Τότε θα πρέπει ΣF=0 και Στ=0, ως οποιοδήποτε σημείο. Αλλά τότε:

$$\Sigma F_x=0 \text{ ή } T=w_x \rightarrow T=mg\cdot\eta\mu\theta=0{,}6mg$$

$$\text{Ενώ } T_{op}=T_{o\lambda}=\mu mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=0{,}32mg$$

Οδηγηθήκαμε σε άτοπο, αφού δεν μπορεί να εμφανιστεί στατική τριβή μέτρου 0,6mg!

- Έστω ότι το ορθογώνιο εκτελεί μεταφορική κίνηση κατά μήκος του επιπέδου. Τότε η τριβή είναι τριβή ολίσθησης μέτρου Τ=0,32mg. Το ερώτημα που μπαίνει είναι αν θα έχουμε $\Sigma\tau_o=0$ ή με άλλα λόγια αν μπορεί να υπάρξει κάθετη αντίδραση με φορέα τέτοιον, που να μην υπάρξει ανατροπή. Για να μην ανατρέπεται πρέπει:

$$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow T\cdot\frac{(A\Delta)}{2}-N\cdot x=0\rightarrow$$

$$x=\frac{T\cdot 3\alpha}{2N}=\frac{0{,}32mg\cdot 3a}{2\cdot 0{,}8Mg}=0{,}6\alpha$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι ο φορέας της Ν απέχει 0,6α από το κέντρο, χωρίς καν να φτάνει στην κορυφή Γ, πράγμα που σημαίνει ότι το ορθογώνιο έρχεται σε επαφή με όλη τη βάση του με το επίπεδο, χωρίς να υπάρχει κανένα πρόβλημα ανατροπής.

Συνεπώς η κίνηση του ορθογωνίου είναι μεταφορική, όπως ακριβώς κινείται και ένα υλικό σημείο.

iii) Αν $\mu=\mu_s=0{,}8$, τότε με την ίδια όπως παραπάνω λογική:

Έστω ότι το ορθογώνιο ισορροπεί. Τότε ΣF=0 και Στ=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο.

Οπότε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow T=T_s=mg\cdot\eta\mu\theta=0{,}6mg$$

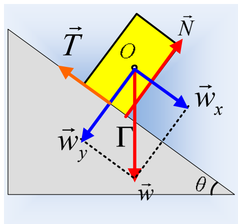
$$E\nu\acute{\omega}\ T_{o\rho}=T_{o\lambda}=\mu mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=0{,}64mg$$

Αυτό σημαίνει ότι θα εμφανιστεί στατική τριβή μέτρου 0,6mg, χωρίς το ορθογώνιο να επιταχυνθεί κατά μήκος του επιπέδου.

Μπορεί να υπάρξει κάθετη αντίδραση με φορέα τέτοιον, που να μην υπάρξει ανατροπή; Για να μην ανατρέπεται πρέπει:

$$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow T\cdot\frac{(A\Delta)}{2}-N\cdot x=0\rightarrow$$

$$x=\frac{T\cdot 3\alpha}{2N}=\frac{0{,}6mg\cdot 3a}{2\cdot 0{,}8mg}=1{,}125\alpha$$



Αλλά η μέγιστη απόσταση του φορέα της Ν από το κέντρο Ο, είναι ίση με α, στην περίπτωση που η Ν ασκηθεί στην κορυφή Γ, όπως στο διπλανό σχήμα.

Συνεπώς δεν μπορούμε να έχουμε ισορροπία και το στερεό θα ανατραπεί γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από την κορυφή Γ, εκτελώντας μόνο στροφική κίνηση (τουλάχιστον για τη στιγμή t=0, αφού δεν μελετάμε την παραπέρα εξέλιξη του φαινομένου…)

dmargaris@gmail.com