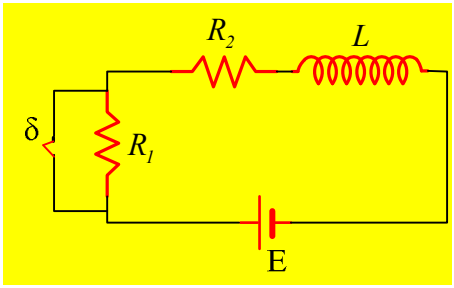
Η αυτεπαγωγή όταν βραχυκυκλώνουμε μια αντίσταση

Το κύκλωμα του σχήματος αποτελείται από ένα ιδανικό πηνίο αυτεπαγωγής 0,1H, δύο αντιστάτες με αντιστάσεις $R_1=4\Omega$ και $R_2=2\Omega$ σε σειρά και πηγή E=12V (r=0). Στα άκρα της R_1 συνδέουμε διακόπτη δ που αρχικά είναι ανοιχτός και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I_o.



i) Να βρεθεί η ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου.

ii) Σε μια στιγμή $t_0=0$ κλείνουμε το διακόπτη δ.

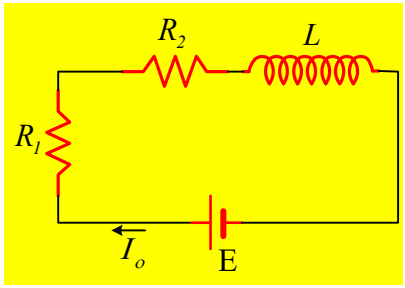
α) Να βρεθεί η τάση στα άκρα κάθε αντιστάτη και η τάση στα άκρα του πηνίου, αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη, καθώς και τη στιγμή t_1 που η ένταση του ρεύματος παίρνει την τιμή $i_1=5A$.

β) Ποια η ισχύς της πηγής και του πηνίου τις δυο παραπάνω χρονικές στιγμές;

iii) Αφού σταθεροποιηθεί ξανά η ένταση του ρεύματος, την στιγμή t_2 ανοίγουμε το διακόπτη δ. Να υπολογιστεί η ισχύς της πηγής, η ισχύς κάθε αντιστάτη και η ισχύς του πηνίου, αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη.

Απάντηση:

i) Αφού το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης, δεν έχουμε φαινόμενα αυτεπαγωγής στο πηνίο, οπότε από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα, βρίσκουμε την ένταση του ρεύματος:

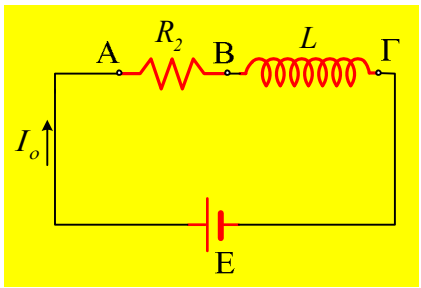


$$I_o = \frac{E}{R_{o\lambda}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{12V}{4\Omega + 2\Omega} = 2A$$

Οπότε στο πηνίο υπάρχει αποθηκευμένη ενέργεια μαγνητικού πεδίου:

$$U_o = \frac{1}{2} L I_o^2 = \frac{1}{2} 0,1 \cdot 2^2 J = 0,2J$$

ii) Μόλις κλείσουμε τον διακόπτη δ, ο αντιστάτης R_1 βραχυκυκλώνεται (ουσιαστικά το ρεύμα περνάει από τον κλάδο με το διακόπτη, οπότε ο αντιστάτης είναι σαν να μην υπάρχει στο κύκλωμα). Ελάχιστα πριν το κλείσιμο του διακόπτη το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I_o=2A$ και η ίδια ένταση θα διαρρέει το πηνίο αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη, αφού απότομες μεταβολές της έντασης δεν μπορούν να συμβούν, λόγω αυτεπαγωγής.



α) Με βάση το παραπάνω, η τάση στα άκρα του αντιστάτη R_1 είναι μηδενική, ενώ στον R_2, θα είναι:

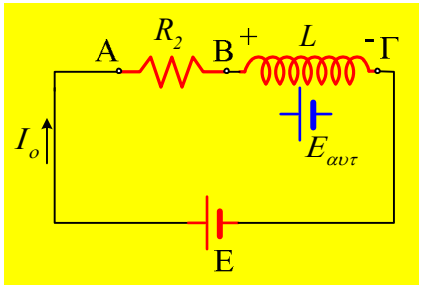
$$V_2 = V_{AB} = I_o R_2 = 2A \cdot 2\Omega = 4V$$

Αλλά τότε με βάση το 2ο κανόνα του Kirchhoff παίρνουμε:

$$E = V_{AB} + V_{B\Gamma} \rightarrow V_{B\Gamma} = E - V_{AB} = 12V - 4V = 8V$$

Δηλαδή η τάση στα άκρα του πηνίου είναι ίση με 8V με θετικό το άκρο Β.

Με άλλα λόγια, μόλις κλείσουμε το διακόπτη δ, η ένταση του ρεύματος τείνει να αυξηθεί, με αποτέλεσμα στο πηνίο εμφανίζεται μια ΗΕΔ από αυτεπαγωγή, με πολικότητα όπως στο σχήμα, οπότε:



$$E - I_o R_2 - L\frac{di}{dt} = 0 \rightarrow$$

$$-L\frac{di}{dt} = -E + I_o R_2 = -12V + 4V = -8V$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο μας λέει ότι η πολικότητα της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή είναι αντίθετη από την πολικότητα της πηγής Ε (την οποία θεωρήσαμε θετική), όπως και θετική πήραμε την ένταση του ρεύματος, συνεπώς η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή τείνει να δώσει ρεύμα αντίθετης φοράς.

Με την ίδια λογική, όταν αυξηθεί η ένταση στην τιμή i_1=5Α θα πάρουμε:

$$V_2' = V_{AB}' = i_1 R_2 = 5A \cdot 2\Omega = 10V \quad και$$

$$E = V_{AB}' + V_{B\Gamma}' \rightarrow V_{B\Gamma}' = E - V_{AB}' = 12V - 10V = 2V$$

Δηλαδή η ΗΕΔ από επαγωγή συνεχίζεται να αντιστέκεται στην αύξηση του ρεύματος, έχοντας όμως μειώσει την απόλυτη τιμή της.

β) Αντιμετωπίζουμε και το πηνίο σαν μια πηγή, όπως την Ε, υπολογίζοντας **την ισχύ που παρέχουν στο κύκλωμα** οι δύο «πηγές». Έτσι αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη:

$$P_E = EI_o = 12V \cdot 2A = 24W$$

$$P_L = E_{αυτ} I_o = -8V \cdot 2A = -16W$$

Όπου το (-) στην ισχύ, μας λέει ότι τελικά το πηνίο δεν δίνει ενέργεια στο κύκλωμα, αντίθετα απορροφά ενέργεια από το ηλεκτρικό ρεύμα, την οποία μετατρέπει σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου, στο εσωτερικό του. Πράγματι αν πάρουμε και την ισχύ που καταναλώνει ο αντιστάτης θα έχουμε:

$$P_Q = I_o^2 R_2 = 2^2 \cdot 2W = 8W$$

Δηλαδή η πηγή Ε παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα με ρυθμό 24J/s και από αυτά τα 8J/s, μετατρέπονται σε θερμότητα στον αντιστάτη R_2, ενώ τα υπόλοιπα 16J/s αποθηκεύονται στο πηνίο με την μορφή ενέργειας μαγνητικού πεδίου.

Αντίστοιχα για την στιγμή t_1, όπου i_1=5Α θα έχουμε:

$$P_{E,1} = Ei_1 = 12V \cdot 5A = 60W$$

$$P_{L,1} = E_{αυτ}' i_1 = -2V \cdot 5A = -10W$$

Τα υπόλοιπα 50J/s καταναλώνονται στον αντιστάτη…

iii) Με κλειστό το διακόπτη η ένταση του ρεύματος θα σταθεροποιηθεί σε μια μέγιστη τιμή:

$$I_2 = \frac{E}{R_{ολ}} = \frac{E}{R_2} = \frac{12V}{2\Omega} = 6\,A$$

Ίδια θα είναι και η ένταση του ρεύματος, αμέσως μόλις ανοίξουμε ξανά το διακόπτη, με την διαφορά ότι τώρα το ρεύμα αυτό θα διαρρέει και τους δύο αντιστάτες.

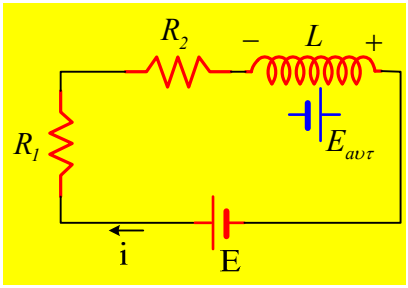
Αλλά τότε η πηγή παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα με ρυθμό:

$$P_{E,2} = EI_2 = 12V \cdot 6\,A = 72W$$

Ενώ η ισχύς του ρεύματος η οποία μετατρέπεται σε θερμότητα στους αντιστάτες είναι:

$$P_{R_1} = I_2^2 R_1 = 6^2 \cdot 4W = 144W \quad και \quad P_{R_2} = I_2^2 R_2 = 6^2 \cdot 2W = 72W \rightarrow$$
$$P_{Q_{ολ}} = 144W + 72W = 216W$$

Ισχύς πολύ μεγαλύτερη από την ισχύ της πηγής! Πού βρέθηκε η επιπλέον ισχύς; Αυτήν την παρέχει στο ρεύμα το πηνίο, το οποίο λειτουργεί ως πηγή. Πράγματι με το κλείσιμο του διακόπτη η ένταση του ρεύματος τείνει να μειωθεί για να γίνει ξανά I_0=2A, οπότε το πηνίο αντιδρώντας στην μείωση της έντασης του ρεύματος, εμφανίζει μια ΗΕΔ από αυτεπαγωγή, με πολικότητα όπως στο διπλανό σχήμα.



Με βάση τα παραπάνω το άθροισμα των ενεργειών που παρέχουν οι δυο «πηγές» στο κύκλωμα, είναι ίση με την ενέργεια που εμφανίζεται σαν θερμότητα στους δύο αντιστάτες.

$$P_{E,2} + P_{E_{αυτ}} = P_Q \rightarrow$$
$$P_{E_{αυτ}} = P_Q - P_{E,2} = 216W - 72W = 144W$$

Εναλλακτικά, από τον 2ο νόμο του Kirchhoff στο κύκλωμα, μόλις ανοίξουμε το διακόπτη, παίρνουμε:

$$E - I_1 R_1 - I_1 R_2 - L\frac{di}{dt} = 0 \rightarrow$$

$$-L\frac{di}{dt} = -E + I_1 R_1 + I_1 R_2 = -12V + 6 \cdot 4V + 6 \cdot 2V = 24V$$

Οπότε:

$$P_L = P_{E_{αυτ}} = E_{αυτ} \cdot I_2 \rightarrow$$
$$P_L = 24 \cdot 6W = 144W$$

dmargaris@gmail.com