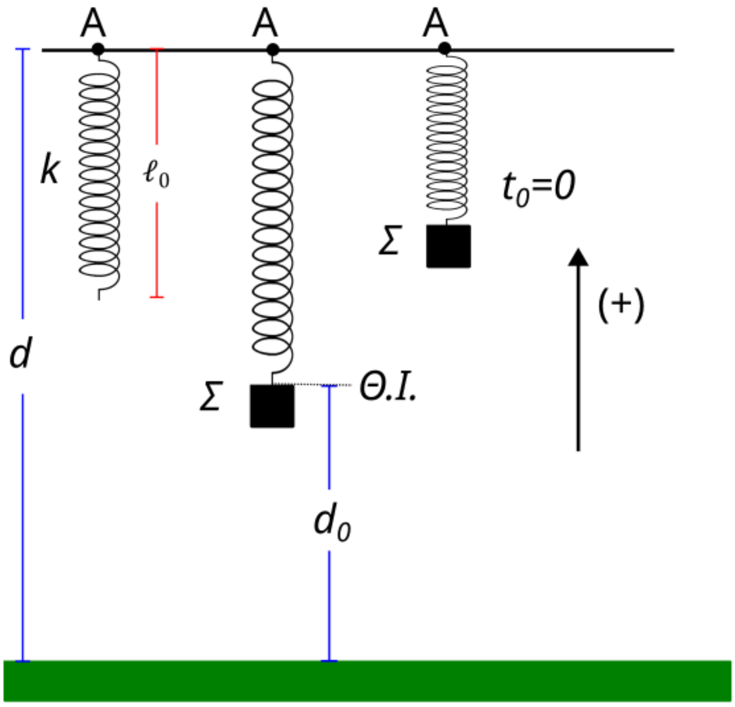
Ένας κλασικός ταλαντωτής θεωρείται κβαντισμένος

Ένα ιδανικό ελατήριο έχει τον άξονά του κατακόρυφο και το άνω του άκρο στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο Α (οροφή), όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σταθερά του ελατηρίου αυτού ισούται με $k = 200N/m$ και το φυσικό του μήκος με $\ell_0 = 50cm$. Η απόσταση του σημείου Α από το έδαφος ισούται με $d = 2m$. Συνδέουμε στο κάτω ελεύθερο άκρο του ελατηρίου ένα σώμα Σ αμελητέων διαστάσεων και παρατηρούμε ότι όταν αυτό ισορροπεί, απέχει από το έδαφος απόσταση $d_0 = 1{,}4m$. Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10m/s^2$. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.



Α. Να υπολογίσετε τη μάζα του σώματος Σ.

Μετακινούμε κατακόρυφα το σώμα Σ κατά $20cm$ πάνω από τη θέση ισορροπίας του και τη χρονική στιγμή που θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των χρόνων $t_0 = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Για τον κλασικό αυτό ταλαντωτή,

Β. να υπολογίσετε τη συχνότητα και την ενέργεια της ταλάντωσης.

Γ. Θεωρώντας ως θετική φορά την προς τα πάνω, να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απόστασης του σώματος Σ από το έδαφος και να κατασκευάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση για το χρονικό διάστημα $0 - T$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης.

Αν θεωρηθεί ότι το σύστημα αποτελεί κβαντικό ταλαντωτή (ταλαντωτή που η ενέργειά του μπορεί να πάρει μόνο διακριτές τιμές)

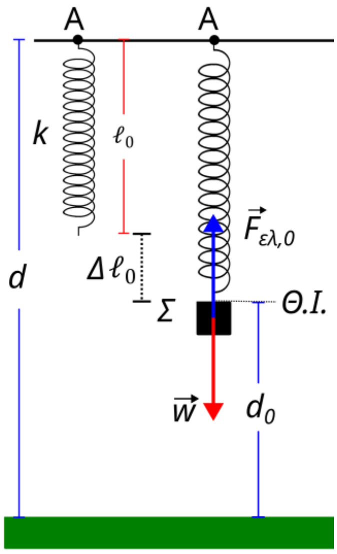
Δ. να υπολογίσετε τον κβαντικό αριθμό n της ενεργειακής στάθμης στην οποία βρίσκεται ο ταλαντωτής.

Ε. Ποια είναι η μικρότερη ποσότητα ενέργειας που μπορεί να αφαιρεθεί από το σύστημα (λόγω τριβών);

Δίνεται η τιμή της σταθεράς του Plank $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34} J \cdot s$. Το σχήμα δεν είναι υπό κλίμακα.

Απάντηση

Α. Από τα δεδομένα και το σχήμα, αντιλαμβανόμαστε ότι όταν το σώμα Σ ισορροπεί, τότε το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_0$, για το οποίο ισχύει ότι:



$$\ell_0 + \Delta\ell_0 + d_0 = d \Rightarrow \Delta\ell_0 = d - d_0 - \ell_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\ell_0 = 2m - 1{,}4m - 0{,}5m \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0{,}1m$$

Στη Θ.Ι. το σώμα Σ δέχεται τη δύναμη του βάρους $\vec{w}$ και τη δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}_{\varepsilon\lambda,0}$. Έτσι, από τη συνθήκη ισορροπίας προκύπτει ότι (κάνοντας χρήση των μέτρων των αντίστοιχων διανυσμάτων)

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w = F_{\varepsilon\lambda,0} \Rightarrow mg = k\Delta\ell_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{k\Delta\ell_0}{g} \Rightarrow m = \frac{200 \cdot 0{,}1}{10} kg \Rightarrow \boxed{m = 2kg}$$

Β. Για τη συχνότητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ ισχύει ότι:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200}{2}} Hz \Rightarrow \boxed{f = \frac{5}{\pi} Hz}$$

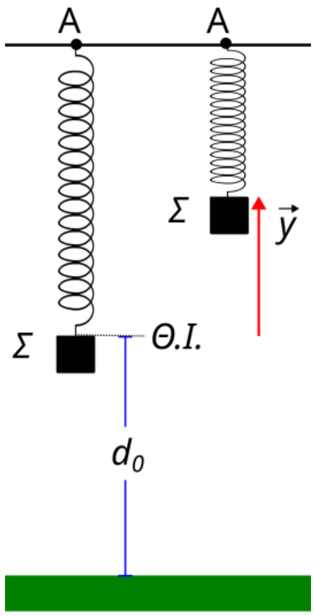
Επειδή το σώμα ξεκινά να εκτελεί Α.Α.Τ. (χωρίς αρχική ταχύτητα) από θέση η οποία απέχει $20cm$ από τη Θ.Ι. του, αντιλαμβανόμαστε ότι η θέση αυτή αντιστοιχεί στην (άνω) ακραία θέση της ταλάντωσης. Έτσι, το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με $A = 20cm$, με αποτέλεσμα η ενέργεια της ταλάντωσης να ισούται με

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0{,}2^2 J \Rightarrow \boxed{E = 4J}$$

Γ. Η απομάκρυνση του σώματος Σ (από τη θέση ισορροπίας του) κατά την απλή αρμονική ταλάντωση που θα εκτελεί, θα είναι της μορφής

$$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

όπου ω η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης και φ_0 η αρχική της φάση.



Ισχύει ότι $\omega = 2\pi f$, άρα $\omega = 10 rad/s$ και επειδή $y = +A$ την $t_0 = 0$, προκύπτει ότι $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} rad$.

Με τη βοήθεια και του σχήματος, αντιλαμβανόμαστε ότι το ζητούμενο ύψος του σώματος από το έδαφος θα δίνεται κάθε χρονική στιγμή από τη σχέση

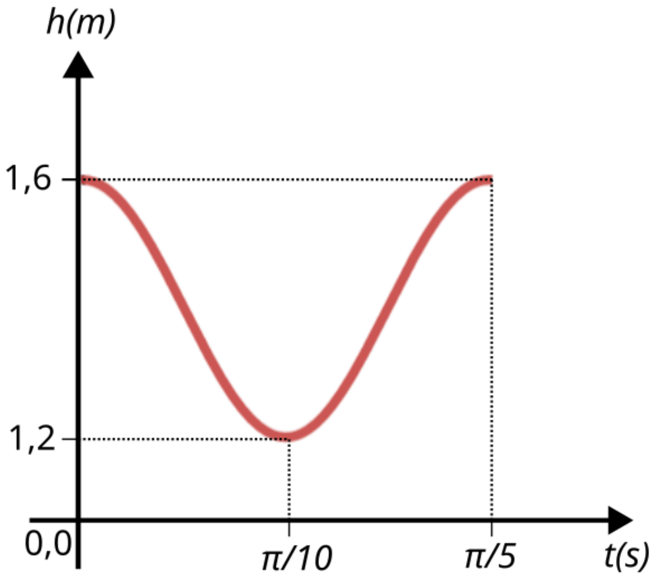
$$h = d_0 + y \Longrightarrow h = d_0 + A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{h = 1{,}4 + 0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης ισούται με

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\pi}{5} s$$

Επομένως, η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι η παρακάτω:



Δ. Σύμφωνα με τη διατύπωση του Plank, η ενέργεια του ταλαντωτή είναι κβαντισμένη και ικανοποιεί τη σχέση $E_n = nhf$. Επομένως, για $E_n = E = 4J$, ο κβαντικός αριθμός n της ενεργειακής στάθμης στην οποία βρίσκεται ο ταλαντωτής, προκύπτει ίσος με:

$$n = \frac{E}{hf} = \frac{4J}{6{,}6 \cdot 10^{-34}J \cdot \frac{5}{\pi}Hz} \Longrightarrow \boxed{n = \frac{4\pi}{33} \cdot 10^{34}} \approx 0{,}38 \cdot 10^{34} = 38 \cdot 10^{32}$$

Ε. Η μικρότερη ποσότητα ενέργειας που μπορεί να αφαιρεθεί από το σύστημα, αντιστοιχεί στην ενεργειακή διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών. Έτσι, το κβάντο ενέργειας αυτού του ταλαντωτή είναι ίσο με:

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda,min} = E_{n+1} - E_n = (n+1)hf - nhf \Longrightarrow E_{\alpha\pi\omega\lambda,min} = hf \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow E_{\alpha\pi\omega\lambda,min} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}J \cdot \frac{5}{\pi}Hz = \frac{33}{\pi} \cdot 10^{-34}J \Longrightarrow \boxed{E_{\alpha\pi\omega\lambda,min} \approx 10{,}5 \cdot 10^{-34}J}$$

Σχόλιο: *Παρατηρούμε ότι στο μακροσκοπικό αυτό σύστημα, η ενεργειακή διαφορά ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ενεργειακές καταστάσεις είναι ασήμαντη σε σχέση με την ολική ενέργεια του ταλαντωτή. Αν και οι ενεργειακές μεταβολές ενός μακροσκοπικού ταλαντωτή είναι κβαντισμένες, η ενέργεια ενός κβάντου είναι πρακτικά μη ανιχνεύσιμη, με αποτέλεσμα να νομίζουμε ότι το ενεργειακό του φάσμα είναι συνεχές.*

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com