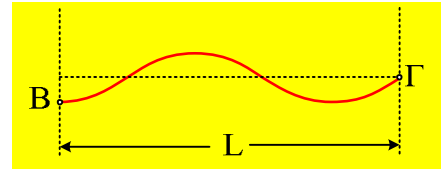


Να βρεθεί πρώτα η εξίσωση του κύματος

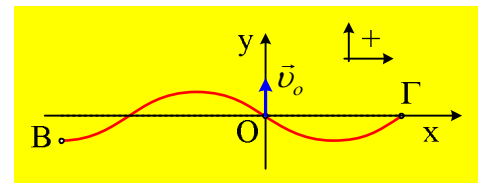
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα, προς την θετική κατεύθυνση (προς τα δεξιά) με πλάτος $A=0,2\text{m}$ με συχνότητα $f=1\text{Hz}$ και στο σχήμα δίνεται η μορφή ενός τμήματος ΒΓ του μέσου, μια στιγμή την οποία θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου ($t_0=0$), όπου $L=2,5\text{m}$. Τη στιγμή αυτή η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Β είναι μηδενική.



- Αφού επιλέξετε την αρχή $x=0$, ενός προσανατολισμένου άξονα, να γράψετε την εξίσωση του κύματος για το παραπάνω κύμα.
- Να σχεδιάσετε την μορφή του τμήματος ΒΓ, την χρονική στιγμή $t_1=2,25\text{s}$.

Απάντηση:

- Το σημείο Ο, του διπλανού σχήματος την στιγμή $t=0$, περνά από την θέση ισορροπίας του, έχοντας ταχύτητα προς τα πάνω, όπου θεωρούμε θετικές τις απομακρύνσεις. Αν λοιπόν θέλουμε να γράψουμε μια εξίσωση ίδιας μορφής με αυτήν του βιβλίου, το σημείο Ο προσφέρεται ως αρχή του άξονα x . Τότε η εξίσωση του κύματος θα έχει την μορφή:



$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Όπου $A=0,2\text{m}$, $T=1\text{s}$, ενώ με βάση το σχήμα $L=\lambda + \frac{1}{4}\lambda = 1,25\lambda$, οπότε $\lambda = \frac{L}{1,25} = \frac{2,5\text{m}}{1,25} = 2\text{m}$ και με

αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε:

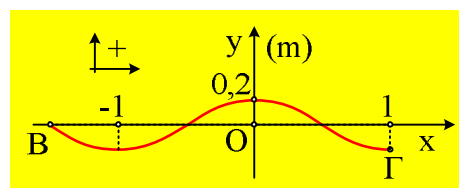
$$y = 0,2\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{1} - \frac{x}{2} \right) = 0,2\eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) \quad (1) \quad (S.I.) \quad \text{με } t \geq 0 \text{ και } -1,5\text{m} \leq x \leq 1\text{m}$$

- Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση κύματος (1) $t=t_1=2,25\text{s}$ παίρνουμε:

$$y = 0,2\eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) = 0,2\eta\mu \left(2\pi \cdot 2,25 - 2\pi \frac{x}{2} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,2\eta\mu \left(4,5\pi - 2\pi \frac{x}{2} \right) = 0,2\eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \pi x \right) = 0,2\sigma\upsilon\nu(\pi x) \quad \text{με } -1,5\text{m} \leq x \leq 1\text{m}$$

Συνεπώς το ζητούμενο στιγμιότυπο θα είναι μια συνημιτονοειδής συνάρτηση, όπως στο παρακάτω σχήμα:

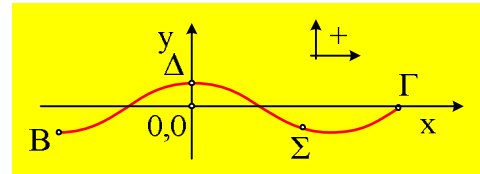


Σχόλιο:

Προφανώς κανείς δεν μας υποχρεώνει να πάρουμε το παραπάνω σημείο O, ως αρχή του άξονα x! Ως αρχή του άξονα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ άλλο σημείο της περιοχής ΒΓ, απλά η εξίσωση θα έχει ελαφρά διαφορετική μορφή, εισάγοντας κάποια γωνία στην φάση.

Ας το δούμε, λαμβάνοντας το σημείο Δ ως αρχή του άξονα x. Το σημείο Δ τη στιγμή t=0 βρίσκεται στην θέση y=+A, έχοντας αρχική φάση απομάκρυνσης φ₀=π/2, οπότε γράφουμε:

$$y_{\Delta} = 0,2\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$



Αλλά τότε το τυχαίο σημείο Σ στην θέση x, θα καθυστερήσει να ταλαντωθεί όμοια με το Δ, κατά $\tau = \frac{x}{v}$, όπου $v = \lambda f = 2m/s$, με αποτέλεσμα η εξίσωση του κύματος να παίρνει την μορφή:

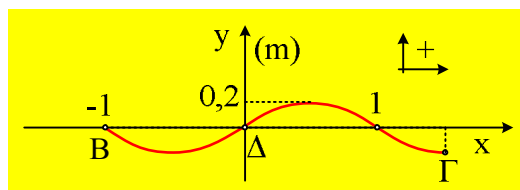
$$y_{\Delta} = 0,2\eta\mu\left(2\pi(t - \tau) + \frac{\pi}{2}\right) = 0,2\eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) \quad (2) \quad (S.I.) \quad t \geq 0 \text{ και } -1m \leq x \leq 1,5m$$

Προφανώς η εξίσωση (2) είναι διαφορετική από την (1), αλλά αυτό καθόλου δεν σημαίνει ότι περιγράφει μια διαφορετική φυσική πραγματικότητα. Έτσι αν θέλουμε το στιγμιότυπο τη στιγμή t₁ θα πάρουμε:

$$y = 0,2\eta\mu\left(2\pi \cdot 2,25 - 2\pi \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 0,2\eta\mu\left(5\pi - 2\pi \frac{x}{2}\right) = 0,2\eta\mu(\pi x) \quad \text{με } -1,5m \leq x \leq 1m$$

Θα έχουμε δηλαδή μια συνάρτηση ημιτονοειδή, με την παρακάτω μορφή:



Ξεχάστε τώρα τους άξονες και συγκρίνετε τις δύο μορφές του μέσου, αυτήν και του στιγμιότυπου στο ii) ερώτημα. Απλά είναι η ίδια μορφή...

dmargaris@gmail.com