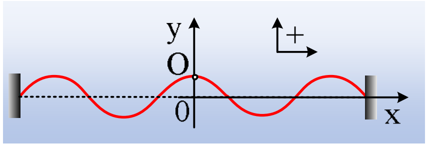
Το στάσιμο κύμα σε μια χορδή

Πάνω στην χορδή του σχήματος, μήκους l=1m, με σταθερά τα δυο άκρα της, έχει σχηματισθεί ένα στάσιμο κύμα και στο σχήμα βλέπετε την μορφή της χορδής, μια στιγμή t=0, όπου η κοιλία στο σημείο Ο, βρίσκεται σε μέγιστη απομάκρυνση. Αν το σημείο Ο αποκτά μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα 0,628m/s τη χρονική στιγμή t_1=0,05s, για πρώτη φορά, ζητούνται:



i) Η ταχύτητα διάδοσης ενός (τρέχοντος) κύματος πάνω στην χορδή αυτή.

ii) Να γραφούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης (y=f(t)) και της ταχύτητας του σημείου Ο (υ=f(t)) σε συνάρτηση με τον χρόνο, θεωρώντας τον προσανατολισμό που δίνεται στο σχήμα.

iii) Θεωρώντας την θέση του σημείου Ο, σαν αρχή ενός συστήματος αξόνων x,y, όπως στο σχήμα:

α) Πόσα ακόμη σημεία ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος με το Ο;

β) Ποια η εξίσωση y=f(x,t) για το στάσιμο κύμα το οποίο έχει δημιουργηθεί πάνω στην χορδή;

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για ένα σημείο της χορδής Σ, το οποίο βρίσκεται στην θέση x=-0,2m.

δ) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο (y=f(t)), για τα σημεία Σ και Ο της χορδής, στους ίδιους άξονες.

Απάντηση:

i) Το σημείο Ο για να πάει από την μέγιστη απομάκρυνση στην θέση ισορροπίας του χρειάζεται χρόνο ίσος με το ¼ της περιόδου ταλάντωσης, οπότε:

$$\frac{T}{4}=t_1 \rightarrow T=4t_1=4\cdot 0,05s=0,2s \rightarrow$$

$$\upsilon_{max}=\omega\cdot A' \rightarrow A'=\frac{\upsilon_{max}}{2\pi/T}=\frac{\upsilon_{max}}{2\pi}T=\frac{0,628}{2\cdot 3,14}0,2m=0,02m$$

Όπου Α΄ το πλάτος ταλάντωσης του Ο (το μέγιστο πλάτος στις θέσεις τω νκοιλιών).

Εξάλλου με βάση το σχήμα, το μήκος της χορδής αντιστοιχεί σε πέντε στάσιμα κύματα (5·λ/2), οπότε:

$$l=\frac{5\lambda}{2} \rightarrow \lambda=\frac{2l}{5}=\frac{2\cdot 1}{5}m=0,4m$$

Όπου λ το μήκος του «τρέχοντος» κύματος, κατά μήκος της χορδής.

Με βάση της παραπάνω τιμές, υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης ενός τρέχοντος κύματος, κατά μήκος της χορδής αυτής:

$$\upsilon_\tau=\lambda f=\lambda\cdot\frac{1}{T}=0,4\cdot\frac{1}{0,2}m/s=2m/s$$

ii) Το σημείο Ο ταλαντώνεται ξεκινώντας την στιγμή t=0, από την θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης, άρα έχοντας αρχική φάση ίση $\varphi_o = \pi/2$. Έτσι η εξίσωσης της απομάκρυνσής του από την θέση ισορροπίας του παίρνει την μορφή:

$$y_o = A'\cdot\eta\mu\left(\omega t+\varphi_o\right)=0,02\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}\right)=0,02\cdot\eta\mu\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\ \ (S.I.)\ (1)$$

Ενώ για την ταχύτητα ταλάντωσής του θα έχουμε:

$$\upsilon_o=\upsilon_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\omega t+\varphi_o\right)=0,628\cdot\sigma\upsilon\nu\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\ \ (S.I.)$$

Σημείωση: Οι παραπάνω εξισώσεις, με βάση την τριγωνομετρία θα μπορούσαν να γραφούν με την μορφή:

$$y_o=0,02\cdot\sigma\upsilon\nu\left(10\pi t\right)\ \ (S.I.)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \upsilon_o=-0,628\cdot\eta\mu\left(10\pi t\right)\ \ (S.I.)$$

Μορφές που δεν μας δίνουν όμως κάτι σημαντικό, οπότε καλύτερα να αποφευχθούν.

iii) Θεωρώντας την αρχή των αξόνων, την θέση μιας κοιλίας, προσαρμόζουμε τα δεδομένα μας, στις εξισώσεις του σχολικού βιβλίου.

α) Με βάση το σχήμα υπάρχει το Ο και άλλα τέσσερα σημεία τα οποία ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος, είναι δηλαδή κοιλίες του στάσιμου κύματος.

β) Στην θεωρία μας, θεωρώντας ότι υπάρχει κοιλία στην θέση x=0 και ότι την στιγμή t=0, το σημείο αυτό περνά από την θέση ισορροπίας κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση, έχουμε την εξίσωση:

$$y=2A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Όπου 2Α το μέγιστο πλάτος του στάσιμου (εδώ 0,02m). Και αν για t=0 το σημείο Ο βρίσκεται στην θέση y=+Α΄, τι θα αλλάξει στην παραπάνω εξίσωση; Προφανώς όχι οι δυο πρώτοι παράγοντας του γινομένου που καθορίζουν το πλάτος κάθε σημείου τη χορδής. Η αρχική φάση θα μπει στο ημίτονο που καθορίζει την φάση. Έτσι με δεδομένο ότι η αρχική φάση είναι π/2, η παραπάνω εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$y=2A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}\right)=0,02\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{0,4}x\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi}{0,2}t+\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow$$

$$y=0,02\cdot\sigma\upsilon\nu\left(5\pi x\right)\cdot\eta\mu\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\ \ (S.I.)$$

Ενώ η εξίσωση της επιτάχυνσης θα ικανοποιεί την γνωστή εξίσωση:

$$\alpha=-\omega^2 y\rightarrow$$

$$\alpha=-100\pi^2\cdot 0,02\cdot\sigma\upsilon\nu\left(5\pi x\right)\cdot\eta\mu\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow$$

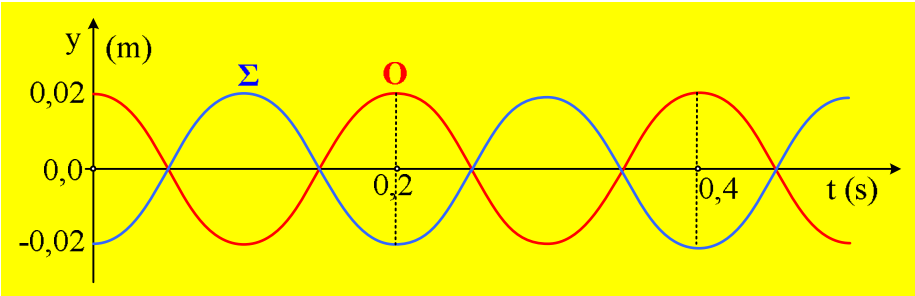
$$\alpha=-20\cdot\sigma\upsilon\nu\left(5\pi x\right)\cdot\eta\mu\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

γ) Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση x=-0,2m παίρνουμε:

$$y_{\Sigma} = 0{,}02 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(5\pi x\right) \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}02 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(5\pi \cdot (-0{,}2)\right) \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_{\Sigma} = 0{,}02 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(-\pi\right) \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}02 \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (2)}$$

Προφανώς αφού για t=0, έχει σχηματισθεί το στάσιμο κύμα, ταλαντώνονται και τα δύο σημεία που μας ενδιαφέρουν Σ και Ο και οι γραφικές παραστάσεις των σχέσεων (1) και (2) θα χαραχτούν για $t \geq 0$ και έτσι θα πάρουμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις:



dmargaris@gmail.com