

Μέγιστη ενέργεια και ορμή στο φαινόμενο Compton

Μια δέσμη φωτονίων με ενέργεια 12keV σκεδάζεται από ελεύθερα ηλεκτρόνια ενός στόχου.

- i) Ποιο είναι το μήκος κύματος των φωτονίων της δέσμης, πριν την σκέδαση;
- ii) Ποιο είναι το μήκος κύματος των φωτονίων που σκεδάζονται κατά γωνία 90° , σε σχέση με την αρχική τους διεύθυνση;
- iii) Να υπολογισθεί η τελική κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου πάνω στο οποίο σκεδάστηκε ένα από τα παραπάνω φωτόνια.
- iv) Να βρεθεί η μέγιστη ενέργεια και η αντίστοιχη ορμή που μπορεί να αποκτήσει ένα ηλεκτρόνιο, μετά από την σκέδαση της παραπάνω δέσμης φωτονίων.

Δίνονται $c=3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $h=6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $m_e=9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ και $1\text{eV}=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Απάντηση:

- i) Η ενέργεια ενός φωτονίου της δέσμης, είναι ίση:

$$E = hf \xrightarrow{c=\lambda f} E = h \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = h \frac{c}{E} \rightarrow$$

$$\lambda = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{12 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 1,03 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,103 \text{ nm}$$

- ii) Το μήκος κύματος του φωτονίου που σκεδάζεται κατά γωνία 90° είναι ίσο:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \sigma \nu 90^\circ) \rightarrow \lambda' = 0,103 \cdot 10^{-9} \text{ m} + \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} (1 - 0) \text{ m} \rightarrow$$

$$\lambda' = 0,103 \cdot 10^{-9} \text{ m} + 0,024 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,105 \text{ nm}$$

- iii) Για την ενέργεια ενός φωτονίου, όπως το παραπάνω, θα έχουμε μετά την σκέδαση:

$$E' = hf' = h \frac{c}{\lambda'} = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{0,105 \cdot 10^{-9}} \text{ J} = 188 \cdot 10^{-17} \text{ J} = \frac{188 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \approx 11790 \text{ eV} = 11,79 \text{ keV}$$

Από την διατήρηση της ενέργειας για την αλληλεπίδραση φωτονίου-ηλεκτρονίου παίρνουμε:

$$E = E' + K_e \rightarrow K_e = E - E' = 12 \text{ keV} - 11,79 \text{ keV} = 0,21 \text{ keV}$$

- iv) Το μήκος κύματος ενός φωτονίου που σκεδάζεται κατά γωνία φ , δίνεται από την εξίσωση:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \sigma \nu \varphi)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η μεγαλύτερη αύξηση στο μήκος κύματος προκύπτει όταν $\varphi=180^\circ$, οπότε το φωτόνιο «ανακλάται» κατά την πρόσπρωσή του σε ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο. Στην

περίπτωση αυτή το φωτόνιο αποκτά το μέγιστο μήκος κύματος:

$$\lambda_{max} - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos 180^\circ) \rightarrow \lambda_{max} = \lambda + \frac{h}{mc} (1 - (-1)) \rightarrow$$

$$\lambda_{max} = \lambda + 2 \frac{h}{mc} = 0,103 \cdot 10^{-9} \text{ m} + 2 \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \rightarrow$$

$$\lambda_{max} = 0,103 \cdot 10^{-9} \text{ m} + 0,048 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,108 \text{ nm}$$

Αλλά τότε το φωτόνιο αυτό έχει (την ελάχιστη) ενέργεια:

$$E_{min} = hf_{min} = h \frac{c}{\lambda_{max}} = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{0,108 \cdot 10^{-9}} \text{ J} \rightarrow$$

$$E_{min} = 183 \cdot 10^{-17} \text{ J} = \frac{183 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \approx 11460 \text{ eV} = 11,46 \text{ keV}$$

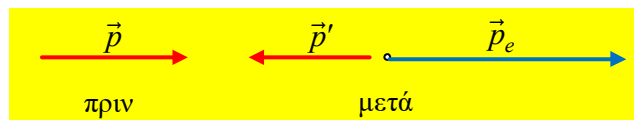
Ενώ έχει ορμή μέτρου:

$$p' = \frac{E_{min}}{c} = \frac{183 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 6,1 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s}$$

Ξανά από την διατήρηση της ενέργειας για την αλληλεπίδραση φωτονίου-ηλεκτρονίου παίρνουμε:

$$E = E_{min} + K_{e,max} \rightarrow K_{e,max} = E - E_{min} = 12 \text{ keV} - 11,46 \text{ keV} = 0,54 \text{ keV}$$

Ενώ λαμβάνοντας υπόψη ότι το φωτόνιο μετά την σκέδαση κινείται αντίθετα από την αρχική του διεύθυνση διάδοσης, θα έχουμε για τις ορμές το παρακάτω σχήμα, από όπου με βάση την αρχή διατήρησης της ορμής, θα έχουμε (η προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική):



$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e \rightarrow \frac{E}{c} = -|p'| + p_e \rightarrow$$

$$p_e = \frac{E}{c} + |p'| = \frac{12.000 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} \text{ kgm/s} + 6,1 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s} = 12,5 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s}$$

Με διεύθυνση την αρχική διεύθυνση διάδοσης του φωτονίου της δέσμης.

dmargaris@gmail.com