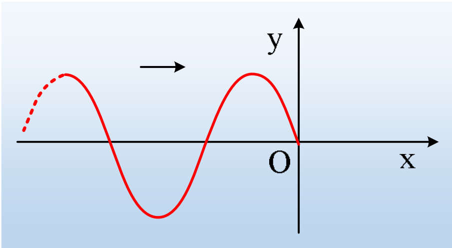
Η φάση και σημεία με μέγιστη ταχύτητα



Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, προς τα δεξιά (θετική κατεύθυνση) και τη στιγμή t=0 φτάνει στο σημείο Ο, στη θέση x=0. Το σημείο Ο ξεκινά την ταλάντωσή κινούμενο προς τα πάνω (θετική φορά) και φτάνει στην ακραία θέση του, σε απόσταση 0,2m σε χρονικό διάστημα Δt=0,5s, ενώ στο μεταξύ το κύμα έχει διαδοθεί φτάνοντας στο σημείο Λ, όπου (ΟΛ)=1m.

i) Να υπολογισθεί η ταχύτητα διάδοσης του κύματος, καθώς και η εξίσωση του κύματος.

ii) Να βρεθεί η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Κ, στη θέση x_1=-1m, σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση για $t \le 2{,}5$s.

iii) Να βρεθούν οι θέσεις των σημείων, τα οποία τη στιγμή t_1=2,5s έχουν μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα ταλάντωσης, στην περιοχή $-2\text{m} \le x \le 2$ m.

iv) Να σχεδιάστε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2=3s.

v) Να βρεθεί η θέση του σημείου Σ του μέσου, το οποίο την στιγμή t_3=6,5s έχει πραγματοποιήσει 43,5 ταλαντώσεις.

Θεωρούμε ότι η πηγή είναι σε μεγάλη απόσταση από την αρχή Ο (x=0) του άξονα.

Απάντηση:

i) Αν η ακραία θέση τους ταλάντωσης του σημείου Ο απέχει 0,2m από την θέση ισορροπίας, τότε το πλάτος είναι Α=0,2m, ενώ Δt= ¼ T ή T=2s. Για την ταχύτητα του κύματος ισχύει:

$$\upsilon = \frac{d}{\Delta t} = \frac{(O\Lambda)}{\Delta t} = \frac{1m}{0,5s} = 2m/s$$

$$\text{Αλλά } \upsilon=\lambda f \rightarrow \lambda = \upsilon T = 2 \cdot 2m = 4m$$

Αφού το σημείο Ο, στο οποίο φτάνει το κύμα, αρχίζει να ταλαντώνεται προς την θετική κατεύθυνση, ισχύει η εξίσωση του κύματος, την οποία δίνει το σχολικό βιβλίο:

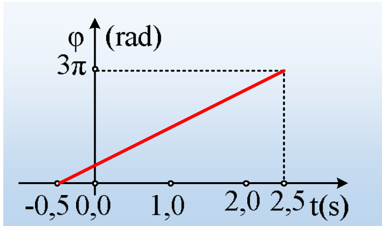
$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right) \quad (S.I.) \quad (1)$$

ii) Η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης των σημείων του μέσου είναι ίση:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right) \xrightarrow{x=-1m} \varphi = 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{-1}{4}\right) \rightarrow \varphi = \pi t + \frac{\pi}{2} \quad (S.I.) \quad (2)$$

Την στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο Κ και αρχίζει η ταλάντωσή του, φ=0, οπότε από την εξίσωση (2) παίρνουμε:

$$\varphi = \pi t + \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow t_K = -0,5s$$



Έτσι η παραπάνω συνάρτηση της φάσης έχει πεδίο ορισμού t ≥ 0,5s και η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος.

iii) Τα σημεία του μέσου, στην περιοχή που μας δίνεται, τα οποία έχουν μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα, είναι αυτά που την στιγμή t_1 περνούν από την θέση ισορροπίας τους:

$$y = 0 \rightarrow 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{2,5}{2} - \frac{x}{4}\right) = 0 \rightarrow \eta\mu\left(2,5\pi - \pi\frac{x}{2}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{2} = k\pi \rightarrow x = 5 - 2k \quad \mu\varepsilon\ k \in Z$$

$$-2 \le 5 - 2k \le 2 \rightarrow -7 \le -2k \le -3 \rightarrow 1,5 \le k \le 3,5 \rightarrow k = 2,\ 3$$

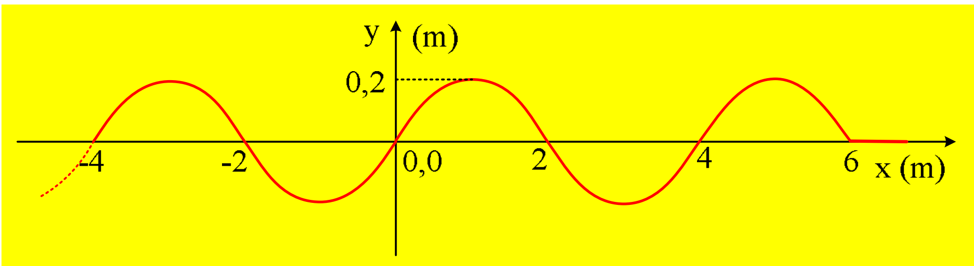
Για k=2 το x=1m και για k=3 → x=-1m, άρα έχουμε δύο σημεία, στις θέσεις x=-1m και x=+1m, με μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα ταλάντωσης $|\upsilon_{max}| = \omega A$.

iv) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος (1) t=3s παίρνουμε:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{4}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(3\pi - \frac{\pi x}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad (3) \quad \mu\acute{\varepsilon}\ x \le \upsilon t_2 \quad \acute{\eta}\ x \le 6m$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (3) έχει την μορφή:



v) Την χρονική στιγμή t_3=6,5s το σημείο στην αρχή του άξονα O, έχει εκτελέσει $N_o = \frac{t_3}{T} = \frac{6,5}{2} = 3,25$ ταλαντώσεις, οπότε το σημείο Σ έχει εκτελέσει περισσότερες ταλαντώσεις κατά:

$$\Delta N = N - N_o = 43,5 - 3,25 = 40,25 \text{ ταλαντώσεις.}$$

Αλλά σε κάθε ταλάντωση το κύμα προχωρά προς τα δεξιά κατά λ, οπότε το Σ είναι αριστερά του O απέχοντας από αυτό απόσταση d=40,25·4m=161m. Βρίσκεται δηλαδή στην θέση x_Σ=-161m.

Σας φαίνεται πολύ… μπακάλικο; Πάμε πάλι!

Παίρνουμε την φάση της απομάκρυνσης για το σημείο Σ, όπου έχει τιμή φ_Σ=43,5·2π (rad). Με αντικατάσταση στην εξίσωση της φάσης του σημείου Σ παίρνουμε:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right) \xrightarrow{t=6,5s,\ \varphi=43,5\cdot 2\pi} 43,5\cdot 2\pi = 2\pi\left(\frac{6,5}{2} - \frac{x}{4}\right) \rightarrow$$

$$43,5 = 3,25 - \frac{x}{4} \rightarrow -\frac{x}{4} = 40,25 \rightarrow$$

$$x = -161m$$

Σχόλιο:

Στο ερώτημα iii) θα έλεγε κάποιος γιατί να μπλέξουμε με τριγωνομετρικές εξισώσεις και να μην σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο, μετρώντας τα σημεία που μας ενδιαφέρουν;

Γιατί θα μπορούσε να ζητούσε τα σημεία τα οποία παρουσιάζουν απομάκρυνση π.χ. y=0,1m! Σημεία που δεν θα μπορούσαν να βρεθούν με την βοήθεια του στιγμιότυπου! Άρα μια γενική λύση είναι ο σίγουρος δρόμος…

dmargaris@gmail.com