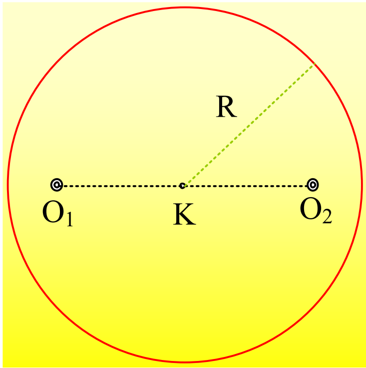
Η συμβολή και σημεία ενός κύκλου

Στην επιφάνεια ενός υγρού σε ηρεμία, βρίσκονται δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων O_1 και O_2, οι οποίες ταλαντώνονται με πλάτος Α, παράγοντας κύματα τα οποία διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με μήκος κύματος λ. Η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών είναι d=1,5λ. Με κέντρο το μέσον Κ της απόστασης των δύο πηγών, φανταζόμαστε κύκλο με ακτίνα R=λ.



i) Τα σημεία του κύκλου στα οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή (δεχόμενοι σταθερό πλάτος των κυμάτων, ταλαντώνονται με πλάτος 2Α) είναι:

α) n=2, β) n= 3, γ) n= 6, δ) n=8

ii) Τα σημεία του κύκλου που παραμένουν ακίνητα είναι:

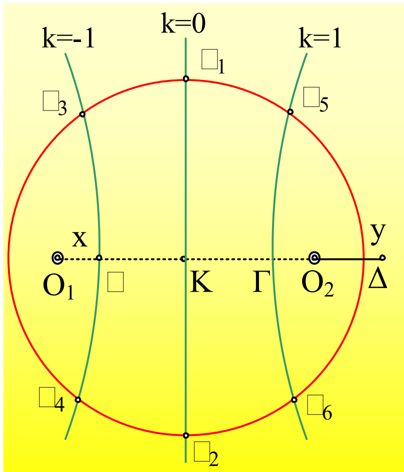
α) n=3, β) n= 4, γ) n= 6, δ) n=8

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

i) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος O_1O_2, το οποίο ισαπέχει από τις δύο πηγές, ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος, λόγω ενισχυτικής συμβολής, αφού:

$$r_1 - r_2 = k\lambda = 0$$



Η μεσοκάθετος αυτή τέμνει τον κύκλο στα σημεία E_1 και E_2.

Έστω τώρα ένα σημείο Β πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα O_1O_2, μεταξύ των δύο πηγών, στο οποίο έχουμε ενισχυτική συμβολή, το οποίο απέχει κατά x από την πηγή O_1, όπως στο σχήμα. Για τις αποστάσεις του από τις δυο πηγές θα ισχύει:

$$\left|r_1 - r_2\right| = N\lambda \;\; όπου\; N=0,1,2... \;\; ή\;\; r_1 - r_2 = k\lambda \;\; με\; k=0,\; \pm 1,\; \pm 2... \rightarrow$$

$$r_1 - r_2 = k\lambda \;\rightarrow x-(d-x) = k\lambda \rightarrow 2x - 1,5\lambda = k\lambda \rightarrow$$

$$x = \frac{k+1,5}{2}\lambda \quad με\; 0 < x < 1,5\lambda \rightarrow$$

$$0 < \frac{k+1,5}{2}\lambda < 1,5\lambda \rightarrow -1,5 < k < 1,5 \;\rightarrow k = \; -1,\; 0,\; +1$$

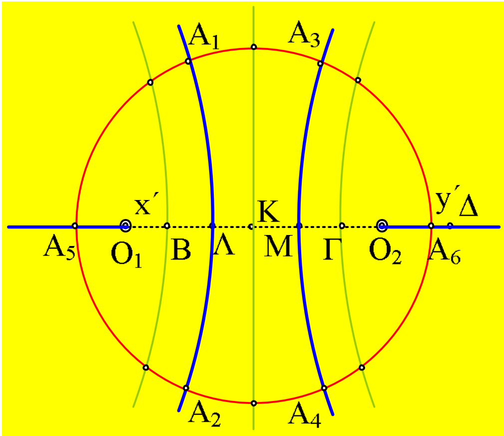
Η τιμή k=0, αντιστοιχεί στην μεσοκάθετο, που αναφέραμε παραπάνω, οπότε παραμένουν οι δύο άλλες τιμές, που παραπέμπουν σε δύο σημείο Β και Γ, από τα οποία διέρχονται οι δυο υπερβολές που έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα και οι οποίες οδηγούν σε 4 ακόμη σημεία του κύκλου με ενισχυτική συμβολή, τα σημεία E_3, E_4 με k=-1 και E_5, E_6 με k=1.

Μήπως υπάρχουν και σημεία εκτός του ευθυγράμμου τμήματος O_1O_2 που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος; Αν πάρουμε ένα σημείο Δ που είναι δεξιά της O_2 που απέχει κατά y από αυτήν θα έχουμε:

$$r_1 - r_2 = (d + y) - y = d = 1,5\lambda \neq k\lambda \ \mu\varepsilon \ k \in Z \quad (1)$$

Άρα δεν έχουμε ενισχυτική συμβολή σε σημεία εξωτερικά του τμήματος O_1O_2, οπότε συνολικά βρίσκουμε 6 σημεία του κύκλου με ενισχυτική συμβολή. Σωστό το γ).

ii) Εφαρμόζοντας την ίδια λογική για τα σημεία μεταξύ των δύο πηγών, στα οποία έχουμε απόσβεση (και μηδενικό πλάτος, με προϋπόθεση ότι τα κύματα διατηρούν σταθερό πλάτος…), θα έχουμε:



$$r_1 - r_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow x' - (d - x') = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow$$

$$2x' - 1,5\lambda = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow$$

$$x' = \frac{k+2}{2}\lambda \quad \mu\varepsilon \ 0 < x' < 1,5\lambda \rightarrow (2)$$

$$0 < \frac{k+2}{2}\lambda < 1,5\lambda \rightarrow -2 < k < 1 \rightarrow k = -1, 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε δύο υπερβολές απόσβεσης (μπλε γραμμές), οι οποίες περνούν από δύο σημεία Λ και Μ τα οποία απέχουν από την πηγή O_1 αποστάσεις:

$$x' = \frac{k+2}{2}\lambda \xrightarrow{k=-1} x'_{\Lambda} = \frac{1}{2}\lambda \qquad \kappa\alpha\iota \xrightarrow{k=0} x'_M = \lambda$$

Έτσι έχουμε τέσσερα σημεία του κύκλου ακίνητα. Τα σημεία A_1, A_2 για k=-1 και A_3, A_4 για k=0.

Μήπως υπάρχουν και σημεία εκτός του ευθυγράμμου τμήματος O_1O_2 που παραμένουν ακίνητα λόγω αποσβεστικής συμβολής; Αν πάρουμε ξανά ένα σημείο Δ που είναι δεξιά της O_2 που απέχει κατά y΄ από αυτήν θα έχουμε:

$$r_1 - r_2 = (d + y) - y = d = 1,5\lambda = 3\frac{\lambda}{2} \quad (3)$$

Άρα κάθε σημείο στις προεκτάσεις του ευθυγράμμου τμήματος O_1O_2, παραμένει ακίνητο, με αποτέλεσμα να έχουμε δύο ακόμη σημεία του κύκλου, που δεν ταλαντώνονται, τα σημεία A_5 και A_6. Έτσι έχουμε ξανά 6 σημεία του κύκλου, που η συμβολή οδηγεί σε απόσβεση και τα οποία παραμένουν ακίνητα.

Σωστό το γ).

Σχόλια:

1) Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το σημείο Κ στο μέσον του τμήματος O_1O_2 ταλαντώνεται με πλάτος 2 Α. Το ίδιο συμβαίνει και στα σημεία Β και Γ, τα οποία απέχουν κατά λ/2 από το Κ. Στο μέσον των ΚΒ και ΚΓ, υπάρχουν σημεία που παραμένουν ακίνητα, τα σημεία Λ και Μ. Έτσι για τις αποστάσεις θα έχουμε (ΚΛ)=(ΚΜ) = λ/4.

2) Παραπάνω προτιμήσαμε να εξετάσουμε χωριστά τι συμβαίνει μεταξύ των δύο πηγών και τι συμβαίνει στα σημεία στην προέκταση του τμήματος O_1O_2. Δεν μιλήσαμε τι συμβαίνει στις θέσεις των δύο πηγών.

Αν όμως προσέξουμε την σχέση (3) θα δούμε ότι d= 3· λ/2, οπότε αν πάρουμε την διαφορά των αποστάσεων του σημείου O_1 από τις δύο πηγές, αυτή η διαφορά ικανοποιεί η συνθήκη απόσβεσης, με αποτέλεσμα τα σημεία O_1 και O_2 να παραμένουν ακίνητα. Θα μπορούσαμε αυτό να το εξάγουμε αν για παράδειγμα στην εξίσωση (2) αντί να χρησιμοποιούσαμε το μικρότερο, χρησιμοποιούσαμε το $\leq$.

$$x' = \frac{k+2}{2}\lambda \quad \mu\varepsilon\ 0 \ \leq\ x' \ \leq 1{,}5\lambda \rightarrow \ (2\alpha)$$

$$0 \ \leq \ \frac{k+2}{2}\lambda \ \leq 1{,}5\lambda \rightarrow -2 \ \leq \ k \ \leq 1 \ \rightarrow k = -2,\ -1,\ 0,\ 1.$$

Όπου για k=-2, x΄=0 και για k=1, τότε x΄=1,5λ, δηλαδή θα βρίσκαμε άλλες δύο «υπερβολές» που περνούν από τις θέσεις των δύο πηγών. Βέβαια οι υπερβολές αυτές έχουν …. «μεταπέσει» και έχουν μετατραπεί σε ημιευθείες με αρχή τα σημεία O_1 και O_2.

dmargaris@gmail.com