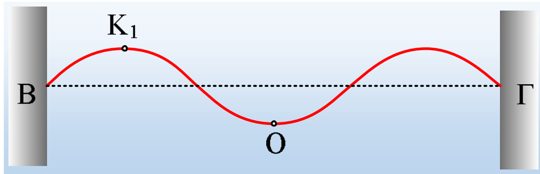
Δύο στάσιμα κύματα ή δυο ταλαντώσεις μιας χορδής



Μια χορδή μήκους 3m είναι στερεωμένη στα άκρα της Β και Γ και πάνω της έχει σχηματισθεί ένα στάσιμο κύμα, όπου στο σχήμα βλέπουμε ένα στιγμιότυπό του, την στιγμή t=0, όπου η κοιλία K_1 βρίσκεται σε απομάκρυνση y=0,2m με μηδενική ταχύτητα ταλάντωσης. Η K_1 φτάνει για πρώτη φορά στην θέση y=-0,2m την στιγμή t_1=1/3 s.

i) Να υπολογισθεί η κινητική ενέργεια μιας στοιχειώδους μάζας dm=2mg της χορδής, η οποία βρίσκεται στην θέση της κοιλίας K_1, την χρονική στιγμή t_2=5/6s.

ii) Πόση είναι η αντίστοιχη κινητική ενέργειας μιας ίσης μάζας τη χορδής την στιγμή t_2, η οποία βρίσκεται σε ένα σημείο Σ, δεξιά της κοιλίας K_1 και σε απόσταση (K_1Σ)= d_1=1/3m.

iii) Ακινητοποιούμε τη χορδή και την θέτουμε ξανά σε ταλάντωση, με τέτοια συχνότητα, ώστε να έχουμε το μεγαλύτερο δυνατόν μήκος κύματος. Στην περίπτωση αυτή, μόλις αποκατασταθεί μόνιμη κατάσταση, το μέσον Ο της χορδής ταλαντώνεται με πλάτος 0,2m. Να υπολογιστεί η συχνότητα ταλάντωσης καθώς και η μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να έχει μια στοιχειώδης μάζα dm=2mg της χορδής.

Απάντηση:

i) Το σημείο K_1 για t=0 βρίσκεται στην ακραία θετική απομάκρυνση y=+0,2m, ενώ φτάνει στο άλλο άκρο της τροχιάς του, σε απομάκρυνση y_1=-0,2m, τη στιγμή t_1. Αλλά ο χρόνος για αυτήν την μετακίνηση είναι ίσος με T/2, οπότε T=2t_1=2/3s.

Τότε όμως η στιγμή t_2=5/6s αντιστοιχεί σε $N=\frac{t_2}{T}=\frac{5/6}{2/3}=1,25$ ταλαντώσεις, συνεπώς το σημείο στην θέση της κοιλίας K_1, αφού έχει ολοκληρώσει μια πλήρη ταλάντωση, έχει κάνει επιπλέον το ¼ της ταλάντωσης, συνεπώς περνά από την θέση ισορροπίας, κινούμενο προς τα κάτω, με ταχύτητα μέγιστου μέτρου:

$$\upsilon_1=\omega A=\frac{2\pi}{T}A_1=\frac{2\pi}{2/3}\cdot 0,2m/s=0,6\pi\ m/s$$

Τότε η μάζα dm έχει μέγιστη κινητική ενέργεια ίση με:

$$K_1=\frac{1}{2}dm\cdot\upsilon_1^2=\frac{1}{2}2\cdot 10^{-6}\cdot(0,6\pi)^2\ J=3,6\cdot 10^{-6}\ J$$

(προφανώς θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση τη απομάκρυνσης y=Αημ(ωt+ π/2) για να βρούμε την θέση της κοιλίας K_1 τη στιγμή t_2 ή και την αντίστοιχη εξίσωση της ταχύτητας).

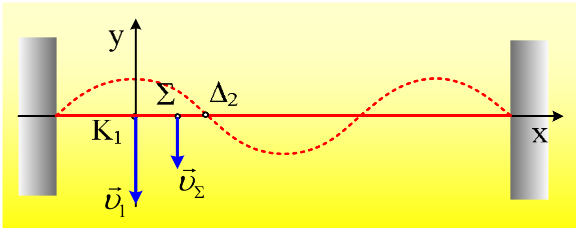
ii) Με βάση το σχήμα που μας δίνεται, το μήκος της χορδής είναι ίσο με 1,5λ, όπου λ το μήκος ενός τρέχοντος κύματος, κατά μήκος της χορδής. Συνεπώς για το μήκος έχουμε:

$$l = 3\frac{\lambda}{2} \to \lambda = \frac{2}{3}l = \frac{2}{3}3m = 2m$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι η θέση της κοιλίας K_1 είναι και η αρχή ενός συστήματος αξόνων x, y, τότε για το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου Σ στην θέση x ισχύει:

$$A_\Sigma = 2A' \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda} = A_1 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{1/3}{2} = 0,1m$$

Η απόσταση της κοιλίας K_1 από τον δεσμό Δ_2 είναι ίση με λ/4=0,5m, οπότε το σημείο Σ είναι μεταξύ της κοιλίας και του επόμενου δεσμού, οπότε ταλαντώνεται σε φάση με την κοιλία, άρα τη στιγμή t_2 περνά και αυτό από την θέση ισορροπίας του, έχοντας μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα:

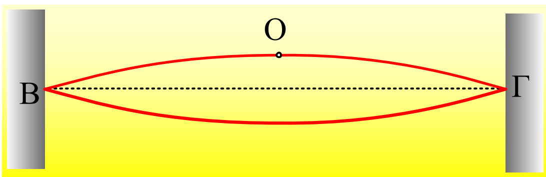


$$\upsilon_\Sigma = \omega A_\Sigma = \frac{2\pi}{T}A_\Sigma = \frac{2\pi}{2/3} \cdot 0,1m/s = 0,3\pi\ m/s$$

Παρουσιάζοντας και η αντίστοιχη μάζα dm, την μέγιστη κινητική της ενέργεια:

$$K_\Sigma = \frac{1}{2}dm \cdot \upsilon_\Sigma^2 = \frac{1}{2}2 \cdot 10^{-6} \cdot (0,3\pi)^2\ J = 0,9 \cdot 10^{-6}\ J$$

iii) Πάνω στη χορδή δημιουργείται στάσιμο κύμα με το μέγιστο λ, όταν το μήκος της χορδής αντιστοιχεί σε $\lambda_1/2$ και η εικόνα που έχουμε είναι αυτή του παρακάτω σχήματος,



αφού «υποχρεωτικά» στα δυο άκρα θα έχουμε δεσμούς. Οπότε τότε $\ell=\lambda_1/2$ ή λ_1=6m.

Αυτή η αλλαγή στο μήκος κύματος, προφανώς συνδέεται με αλλαγή και στη συχνότητα ταλάντωσης, αφού δεν αλλάξαμε τις ιδιότητες τη χορδής και η ταχύτητα ενός κύματος πάνω της παραμένει σταθερή. Οπότε θα έχουμε:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \lambda_1 f_1 \to f_1 = \frac{\lambda}{T\lambda_1} = \frac{2m}{2/3\, s \cdot 6m} = 0,5Hz$$

Η παραπάνω συχνότητα, είναι η ελάχιστη δυνατή για την οποία σχηματίζεται πάνω στη χορδή στάσιμο κύμα και ονομάζεται θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της χορδής.

Η στοιχειώδης μάζα που αποκτά μέγιστη κινητική ενέργεια, είναι αυτή που θα αποκτά και μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης, συνεπώς αυτή που βρίσκεται στο μέσον Ο της χορδής, αφού εκεί έχουμε και το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης (κοιλία του στάσιμου). Η ενέργεια αυτή είναι ίση:

$$K_o = \frac{1}{2} dm \cdot \upsilon_o^2 = \frac{1}{2} dm \cdot \left(\omega_1 A_1\right)^2 = \frac{1}{2} dm \cdot 4\pi^2 f_1^2 A_1^2 \rightarrow$$

$$K_o = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^{-6} \cdot 4\pi^2 \cdot 0,5^2 \cdot 0,2^2 \, J = 0,4 \cdot 10^{-6} \, J$$

dmargaris@gmail.com