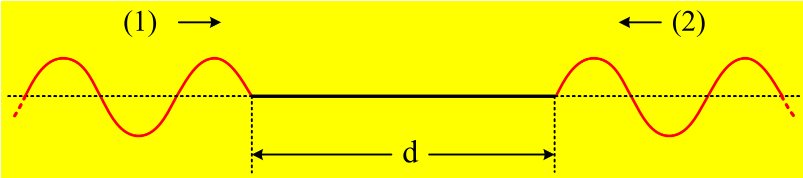
Δύο τρέχοντα κύματα και ένα στάσιμο

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις, δύο αρμονικά κύματα, με πλάτη Α=0,2m, μήκη κύματος λ=1m και συχνότητα *f=2Hz*, όπως στο σχήμα:



Τη χρονική στιγμή t_0=0, τα μέτωπα των δύο κυμάτων απέχουν απόσταση d=2m.

i) Αν τα δύο κύματα συναντώνται σε ένα σημείο Ο του μέσου, ενώ στη συνέχεια έχουμε δημιουργία στάσιμου κύματος πάνω στο ελαστικό μέσο, τότε στο σημείο Ο θα δημιουργηθεί δεσμός ή κοιλία; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

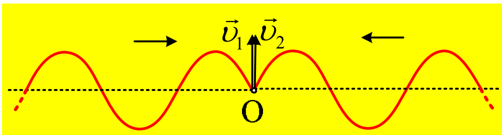
ii) Παίρνοντας το σημείο Ο σαν αρχή ενός συστήματος αξόνων x,y με θετικές κατευθύνσεις προς τα δεξιά και προς τα πάνω, να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κυμάτων (1) και (2).

iii) Να βρείτε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται μετά την συμβολή των δύο κυμάτων.

iv) Να σχεδιάστε την μορφή του μέσου *y=f(x)*, την χρονική στιγμή t=1,125s.

Απάντηση:

i) Στο σημείο που φτάνει κάθε κύμα, θα αρχίσει να ταλαντώνεται προς τα πάνω, οπότε φτάνοντας τα δύο κύματα στο μέσον Ο της απόστασης d (τα δυο κύματα διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα $\upsilon=\lambda f=2m/s$), θα έχουμε την εικόνα του διπλανού σχήματος, όπου το σημείο Ο θα αποκτήσει ταχύτητα, με φορά προς τα πάνω, με μέτρο:

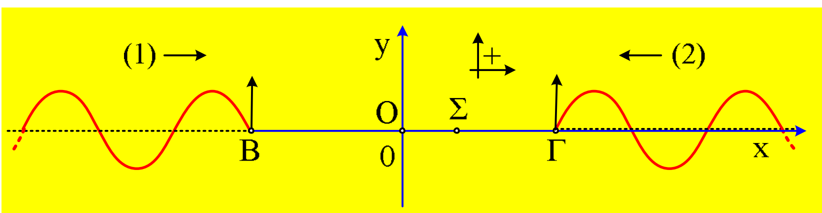


$$\upsilon_o = \upsilon_1 + \upsilon_2 = \omega A + \omega A = \omega(2A)$$

Βλέπουμε το σημείο συμβολής Α να ξεκινά μια ταλάντωση, ίδιας συχνότητας και πλάτους 2Α, πράγμα που σημαίνει ότι δημιουργείται μια κοιλία του στάσιμου κύματος.

ii) Έστω το σύστημα αξόνων του σχήματος, με αρχή το σημείο Ο και τα δυο κύματα στις θέσεις που βρίσκονται την στιγμή t_0=0. Τα σημεία Β και Γ ξεκινούν να ταλαντώνονται προς τα πάνω με εξισώσεις:

$$y_B = y_\Gamma = A\eta\mu(\omega t) = 0,2\cdot\eta\mu(4\pi t) \quad \text{μονάδες στο S.I.)}$$



Έστω ότι τη στιγμή t_1 το κύμα (1) φτάνει σε ένα τυχαίο σημείο Σ, στη θέση x, όπου:

$$t_1 = \frac{s_{B\Sigma}}{\upsilon} = \frac{1+x}{2} \ (S.I.).$$

Τότε το σημείο Σ εξαιτίας του πρώτου κύματος θα ταλαντωθεί με εξίσωση:

$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu 4\pi\left(t - t_1\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 4\pi\left(t - \frac{1+x}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(2t - x - 1\right) \ \text{(S.I.) (1)}$$

Με την ίδια λογική το σημείο Σ θα καθυστερήσει να ταλαντωθεί εξαιτίας του δεύτερου κύματος, το οποίο διαδίδεται προς τα αριστερά, για χρονικό διάστημα t_2, όπου:

$$t_2 = \frac{s_{\Gamma\Sigma}}{\upsilon} = \frac{1-x}{2} \ (S.I.)$$

Οπότε τότε το σημείο Σ εξαιτίας του δεύτερου κύματος θα ταλαντωθεί με εξίσωση:

$$y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu 4\pi\left(t - t_2\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 4\pi\left(t - \frac{1-x}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(2t + x - 1\right) \ \text{(S.I.) (2)}$$

iii) Με βάση την αρχή της επαλληλίας, κάθε σημείο στο οποίο συμβάλλουν τα κύματα θα ταλαντώνεται με εξίσωση απομάκρυνσης $y=y_1+y_2$, οπότε με χρήση των εξισώσεων (1) και (2) θα πάρουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(2t - x - 1\right) + 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(2t + x - 1\right) \rightarrow$$

$$y = 2 \cdot 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{2t - x - 1 + 2t + x - 1}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{2t - x - 1 - 2t - x + 1}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(2t - 1\right) \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi(-x) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x \cdot \eta\mu 2\pi\left(2t - 1\right) \ (3)$$

iv) Την χρονική στιγμή t=1,125s, κάθε κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση:

$$d_1 = d_2 = \upsilon t = 2 \cdot 1,125m = 2,25m$$

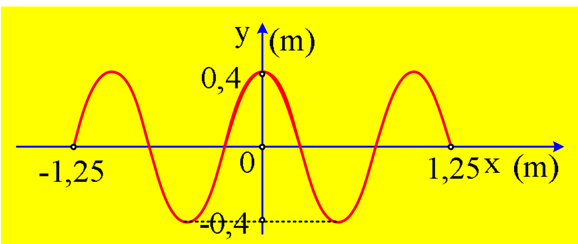
Οπότε το (1) έχει φτάσει μέχρι την θέση x_1=-1m+2,25m=1,25m, ενώ το (2) θα έχει διαδοθεί μέχρι την θέση x_2=1m-2,25m=-1,25m. Αυτό σημαίνει ότι στην περιοχή $-1,25m \le x \le 1,25m$ έχουμε στάσιμο κύμα και η μορφή του μέσου καθορίζεται από την εξίσωση (3), ενώ για x>1,25m θα ισχύει η σχέση (2) και για x < -1,25 η εξίσωση (1).

Έτσι με αντικατάσταση στην (3) t=1,125s παίρνουμε:

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x \cdot \eta\mu 2\pi\left(2t - 1\right) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x \cdot \eta\mu 2\pi\left(2 \cdot 1,125 - 1\right) \rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x \ \acute{o}\pi o\upsilon \ -1,25m \le x \le 1,25m$$

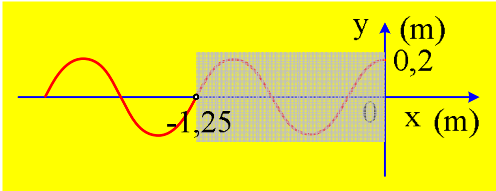
Με γραφική παράσταση:



Με αντικατάσταση t=1,125s στην εξίσωση (1) βρίσκουμε τη μορφή του μέσου, στην περιοχή x < -1,25m:

$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(2t - x - 1\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(2 \cdot 1,125 - x - 1\right) \rightarrow$$
$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(2,25 - x - 1\right) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(2,5\pi - 2\pi x\right) = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x \ \mu\varepsilon\ \ x<-1,25m$$

Με γραφική παράσταση:

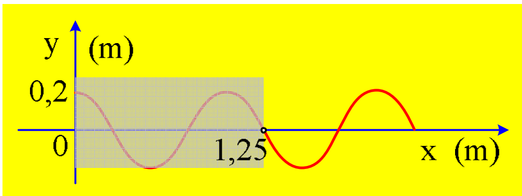


Όπου έχουμε γκριζάρει την περιοχή -1,25m ≤x<0, την οποία και εξαιρούμε, αφού σε αυτή έχει δημιουργηθεί το στάσιμο κύμα.

Τέλος με αντικατάσταση στην (2) t=1,125s, βρίσκουμε την μορφή στην περιοχή του μέσου με x>1,25m:

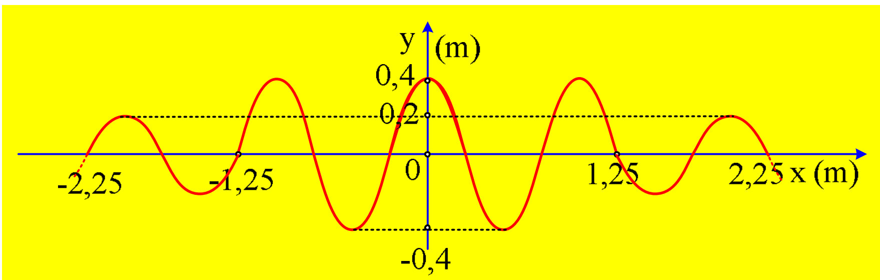
$$y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(2t + x - 1\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(2 \cdot 1,125 + x - 1\right) \rightarrow$$
$$y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu\left(4,5\pi + 2\pi x - 2\pi\right) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(2,5\pi + 2\pi x\right) = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi x \ \ \mu\varepsilon\ x>1,25m$$

Με γραφική παράσταση:



Όπου και πάλι εξαιρούμε την περιοχή 0<x<1,25m.

Δεν μένει τώρα, παρά να ενώσουμε, τις τρεις παραπάνω γραφικές παραστάσεις, σε ΜΙΑ, αφού αυτό μας ζητείται και να πάρουμε την παρακάτω εικόνα:



dmargaris@gmail.com