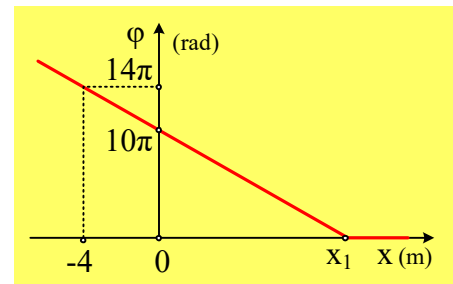


Από ένα διάγραμμα φάσης

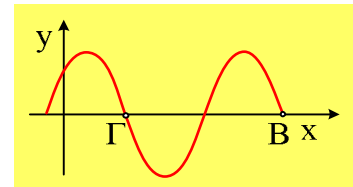
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό πλάτους $A=0,2\text{m}$ και στο σχήμα δίνεται το διάγραμμα της φάσης της απομάκρυνσης των διαφόρων σημείων του μέσου, σε συνάρτηση με την θέση x ($\varphi=f(x)$) τη χρονική στιγμή t_1 .



- i) Το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά (θετική φορά του άξονα) ή προς τα αριστερά;
- ii) Να υπολογίσετε το μήκος του κύματος καθώς και την θέση x_1 , όπου μηδενίζεται η φάση τη στιγμή t_1 .
- iii) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της φάσης ($\varphi=f(x)$) την χρονική στιγμή $t_2=t_1+T$, όπου T η περίοδος ταλάντωσης των σημείων του μέσου.
- iv) Αν το κύμα ικανοποιεί την εξίσωση $y=A\cdot\eta\mu 2\pi(t/T-x/\lambda)$ να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος την στιγμή t_1 , αν $T=1\text{s}$.
- v) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης $y=f(t)$ για ένα σημείο Σ , στην θέση $x=-4\text{m}$, μέχρι την στιγμή t_1 .

Απάντηση:

- i) Με βάση το διάγραμμα, βλέπουμε ότι καθώς κινούμαστε προς τα δεξιά, η φάση της απομάκρυνσης μειώνεται. Αυτό σημαίνει ότι μειώνεται ο χρόνος ταλάντωσης, καθώς μετακινούμαστε προς τα δεξιά. Αυτό σημαίνει ότι το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά.
- ii) Ας δούμε το διπλανό στιγμιότυπο ενός κύματος, το οποίο έχει φτάσει στο σημείο Β. Προφανώς η φάση της απομάκρυνσης του Β είναι μηδενική. Το σημείο Γ, το οποίο απέχει από το Β κατά λ , έχει εκτελέσει μια ταλάντωση και η φάση της απομάκρυνσής του θα είναι ίση με 2π . Αλλά τότε στην περίπτωσή μας η φάση μειώνεται από 14π σε 10π , όταν μετακινηθούμε από το σημείο Σ στην θέση $x_2=-4\text{m}$ στην θέση $x=0$, πράγμα που σημαίνει ότι η απόσταση των 4m αντιστοιχεί σε δύο μήκη κύματος, οπότε $\lambda=2\text{m}$. Ας το δούμε λίγο με εξισώσεις. Για την φάση θα έχουμε:



$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \xrightarrow{t_1} \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \rightarrow$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda} \rightarrow (1)$$

$$\lambda = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{\Delta\varphi} = 2\pi \frac{-4\text{m} - 0}{-4\pi} = 2\text{m}$$

Εξάλλου εφαρμόζοντας την σχέση (1) για τις θέσεις $x=0$ και x_1 παίρνουμε:

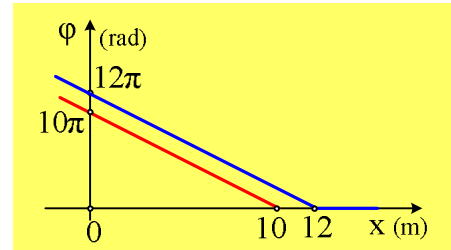
$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda} \rightarrow |\Delta\varphi| = 2\pi \frac{|\Delta x|}{\lambda} \rightarrow |\Delta x| = \frac{|\Delta\varphi|}{2\pi} \lambda \rightarrow$$

$$x_1 = \frac{10\pi}{2\pi} 2m = 10m$$

iii) Η συνάρτηση της φάσης ως προς το x , (για ορισμένη χρονική στιγμή) είναι συνάρτηση πρώτου βαθμού:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \xrightarrow{t_1} \varphi = 2\pi \frac{t_1}{T} - \frac{2\pi}{\lambda} x$$

Βλέπουμε από την παραπάνω σχέση, ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ($2\pi/\lambda$) παραμένει σταθερός, οπότε και μια άλλη στιγμή η ευθεία θα έχει την ίδια κλίση με την κλίση την στιγμή t_1 . Έτσι την χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + T$, το κύμα θα έχει διαδοθεί κατά $\lambda = 2m$, φτάνοντας στην θέση $x_2 = 12m$, ενώ η φάση όλων των σημείων θα έχει αυξηθεί κατά 2π rad. Με βάση αυτά παίρνουμε την μπλε γραμμή στο διπλανό διάγραμμα.

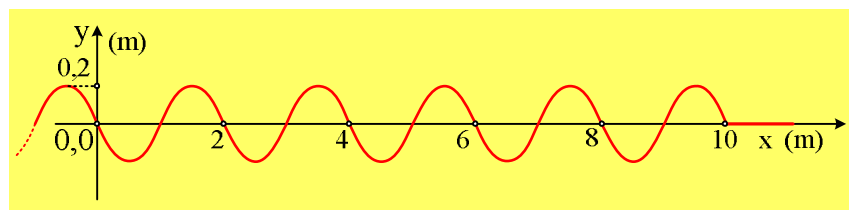


iv) Η εξίσωση του κύματος παίρνει την μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \rightarrow y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{1} - \frac{x}{2} \right) \xrightarrow{t=5T=5s}$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(5 - \frac{x}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu (10\pi - \pi x) = -0,2 \cdot \eta\mu (\pi x)$$

Με αποτέλεσμα το ζητούμενο στιγμιότυπο την στιγμή t_1 έχει την μορφή:



Αξίζει να σημειωθεί ότι έχουμε το δικαίωμα να βαθμολογήσουμε με διαφορετική κλίμακα, τους δύο άξονες x και y . Έτσι στο παραπάνω διάγραμμα το μήκος κύματος $\lambda = 2m$, δεν είναι 10πλάσιο του πλάτους $A = 0,2m$.

v) Με αντικατάσταση $x = -4m$ στην εξίσωση του κύματος, βρίσκουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Σ:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) \xrightarrow{x=-4m}$$

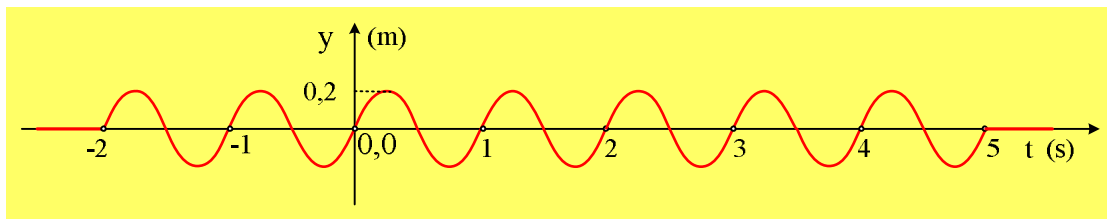
$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (t + 2) = 0,2 \cdot \eta\mu (2\pi t + 4\pi) = 0,2 \cdot \eta\mu (2\pi t) \quad (2)$$

Όπου μηδενίζοντας την φάση βρίσκουμε:

$$\varphi = 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) \rightarrow 0 = 2\pi (t_y + 2) \rightarrow t_y = -2s$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το σημείο Σ ταλαντώνεται μετά την στιγμή $t = -2s$ ή με άλλα λόγια το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (2) είναι $t \geq -2s$.

Έτσι η ζητούμενη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου Σ, σε συνάρτηση με το χρόνο, παίρνει την μορφή:



dmargaris@gmail.com