

### Ένα αρμονικό κύμα και ένα υλικό σημείο

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση ένα αρμονικό κύμα, πλάτους  $A=0,4\text{m}$  με ταχύτητα  $2\text{m/s}$ . Την χρονική στιγμή  $t=0$ , το κύμα φτάνει στην αρχή  $O$  ενός προσανατολισμένου άξονα, το οποίο αρχίζει να ταλαντώνεται, κινούμενο προς τα πάνω (θετική απομάκρυνση) με περίοδο  $T=2\text{s}$ .

- i) Να γράψετε την εξίσωση του διαδιδόμενου κύματος.
- ii) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος την χρονική στιγμή  $t_1=4,5\text{s}$ .
- iii) Ένα υλικό σημείο  $\Sigma$  του μέσου, με μάζα  $m=1\text{g}$ , βρίσκεται στην θέση  $x_1=20/3\text{m}$ . Να υπολογίσετε την ταχύτητα του  $\Sigma$  και την συνισταμένη δύναμη που δέχεται από το μέσον, τις χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_2=2,8\text{s}$ .

#### Απάντηση:

- i) Το σημείο  $O$  αρχίζει να ταλαντώνεται ξεκινώντας από την θέση ισορροπίας του, χωρίς αρχική φάση, συνεπώς για την απομάκρυνσή του μπορούμε να γράψουμε:

$$y_o = A \cdot \eta\mu(\omega t) = 0,4 \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 0,4 \cdot \eta\mu(\pi t) \quad (S.I.) \quad \text{με } t \geq 0$$

Αλλά τότε ένα σημείο στην θέση  $x$ , θα καθυστερήσει να ταλαντώνεται κατά  $t' = \frac{x}{v}$ , με αποτέλεσμα η εξίσωση της απομάκρυνσής του (και άρα η εξίσωση του κύματος) να παίρνει την μορφή:

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu\pi(t - t') = 0,4 \cdot \eta\mu\pi\left(t - \frac{x}{v}\right) \rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right) \quad (S.I.)$$

- ii) Από την θεμελιώδη εξίσωση κυματικής βρίσκουμε το μήκος κύματος:

$$v = \lambda f \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = vT = 2 \cdot 2\text{m} = 4\text{m}$$

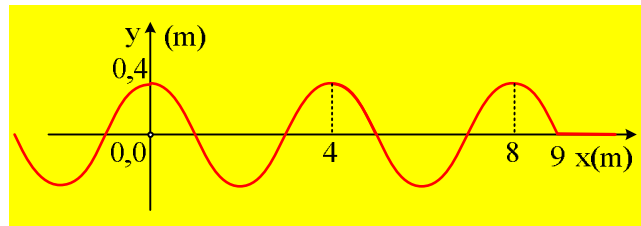
Ενώ το κύμα αυτό την στιγμή  $t_1$  έχει διαδοθεί μέχρι την θέση  $x = vt_1 = 2 \cdot 4,5\text{m} = 9\text{m}$

Εξάλλου αντικαθιστώντας στην εξίσωση κύματος  $t=4,5\text{s}$  θα πάρουμε:

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{4,5}{2} - \frac{x}{4}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu\left(4\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi \frac{x}{2}\right) \quad \text{με } x \leq 9\text{m}$$

Με βάση τις παραπάνω πληροφορίες σχεδιάζουμε μια συνημιτονοειδή καμπύλη, όπως στο παρακάτω σχήμα:



iii) Το κύμα φτάνει στο σημείο Σ την χρονική στιγμή:

$$t_{\Sigma} = \frac{x_{\Sigma}}{v} = \frac{20/3}{2} s = \frac{10}{3} s = 3,33s$$

Οπότε την στιγμή  $t_2=2,8s$ , το κύμα δεν έχει φτάσει στο Σ, το οποίο παραμένει ακίνητο στην θέση ισορροπίας και  $\Sigma F=0$  και  $v_{\Sigma}=0$ . Προφανώς την στιγμή  $t_1$ , το κύμα έχει προχωρήσει πολύ πέρα του Σ, το οποίο πλέον ταλαντώνεται.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Σ θα προκύψει αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος  $x=20/3m$ , οπότε θα πάρουμε:

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right) \xrightarrow{x=\frac{20}{3}m} y_{\Sigma} = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{20/3}{4} \right) \rightarrow$$

$$y_{\Sigma} = 0,4 \cdot \eta\mu \left( \pi t - \frac{10\pi}{3} \right) \quad (S.I.)$$

Αλλά τότε η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του Σ, θα είναι:

$$v_{\Sigma} = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu \left( \pi t - \frac{10\pi}{3} \right) = 0,4 \cdot \pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left( \pi t - \frac{10\pi}{3} \right) \xrightarrow{t=4,5s}$$

$$v_{\Sigma} = 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left( \frac{9\pi}{2} - \frac{10\pi}{3} \right) = 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left( \frac{7\pi}{6} \right) = 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) \rightarrow$$

$$v_{\Sigma} = 0,4\pi \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) m/s = -0,2\sqrt{3}\pi \text{ m/s}$$

Ενώ για την συνισταμένη δύναμη θα έχουμε:

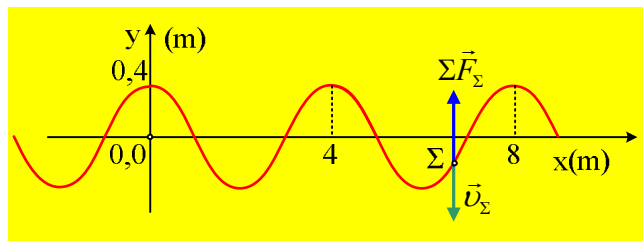
$$\Sigma F = ma = m(-\omega^2 x) = -m\pi^2 \cdot 0,4 \cdot \eta\mu \left( \pi t - \frac{10\pi}{3} \right) \rightarrow$$

$$\Sigma F = -4 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot \eta\mu \left( \frac{9\pi}{2} - \frac{10\pi}{3} \right) = -4 \cdot 10^{-3} \cdot \eta\mu \left( \frac{7\pi}{6} \right) = -4 \cdot 10^{-3} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) N \rightarrow$$

$$\Sigma F = 2 \cdot 10^{-3} N$$

### Σχόλιο:

Αξίζει να δούμε πού βρίσκεται, πάνω στο στιγμιότυπο του κύματος, το σημείο Σ και τι ακριβώς βρήκαμε για την ταχύτητα και την συνισταμένη δύναμη στο υλικό σημείο.



Το σημείο  $\Sigma$  έχει ταχύτητα προς τα κάτω, ενώ η συνισταμένη δύναμη, είναι δύναμη εναλλαγής με κατεύθυνση προς την θέση ισορροπίας (με φορά προς τα πάνω).

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)