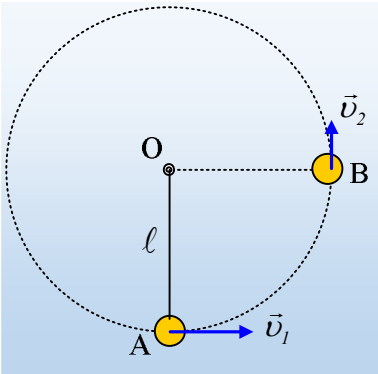


**Μια κυκλική κίνηση, όχι ομαλή**

Μια σφαίρα μάζας  $m=0,2\text{kg}$  κινείται σε κατακόρυφη κυκλική τροχιά κέντρου  $O$ , δεμένη στο άκρο νήματος μήκους  $l=1\text{m}$ . Σε μια στιγμή η σφαίρα περνά από το σημείο  $A$ , το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς της, έχοντας ταχύτητα μέτρου  $v_1=6\text{m/s}$ .

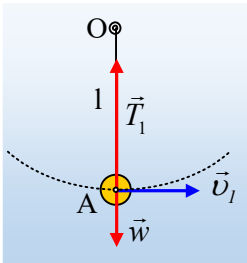


- i) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος στην παραπάνω θέση  $A$ .
- ii) Πόση είναι η κινητική ενέργεια της σφαίρας στην θέση  $A$  και ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας;
- iii) Μετά από λίγο η σφαίρα περνά από τη θέση  $B$ , όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο. Για την θέση αυτή να βρεθούν:
  - α) Η ταχύτητα της σφαίρας.
  - β) Η τάση του νήματος.
  - γ) Η οριζόντια και η κατακόρυφη επιτάχυνση της σφαίρας.
- iv) Να υπολογιστούν η μεταβολή της (γραμμικής) ταχύτητας μεταξύ των θέσεων  $A$  και  $B$ . Ποια η αντίστοιχη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας;

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

**Απάντηση:**

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα, στην θέση  $A$ . Η συνισταμένη δύναμη στην διεύθυνση της ακτίνας παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, οπότε:



$$\Sigma F = m \frac{v_1^2}{R} \rightarrow T_1 - w = m \frac{v_1^2}{R} \rightarrow T_1 = w + m \frac{v_1^2}{R} \rightarrow$$

$$T_1 = 0,2 \cdot 10\text{N} + 0,2 \frac{6^2}{1}\text{N} = 9,2\text{N}$$

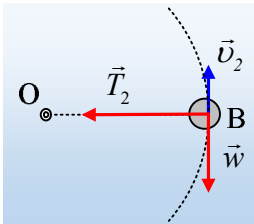
- ii) Η σφαίρα στην θέση  $A$  έχει κινητική ενέργεια:

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} 0,2 \cdot 6^2\text{J} = 3,6\text{J}$$

Ενώ αφού η συνισταμένη δύναμη στη σφαίρα, κατευθύνεται προς το κέντρο της τροχιάς, είναι κάθετη στην ταχύτητα και δεν παράγει έργο ή αν προτιμάτε η ισχύς της είναι μηδενική, οπότε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx \cdot \cos 90^\circ}{dt} = \Sigma F \cdot v \cdot \cos 90^\circ = 0$$

- iii) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στην θέση  $B$ , όπου η τάση είναι οριζόντια.



- α) Στη διάρκεια της μετακίνησης της σφαίρας από την θέση Α στην θέση Β, η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, δύναμη συντηρητική, με αποτέλεσμα η μηχανική ενέργεια να παραμένει σταθερή. Οπότε θεωρώντας  $U_A=0$  εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ παίρνοντας:

$$K_A + U_A = K_B + U_B \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh \rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2g\ell} = \sqrt{6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 1} \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$

- β) Η τάση του νήματος  $T_2$  είναι εδώ η κεντρομόλος δύναμη, οπότε:

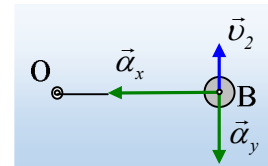
$$\Sigma F = m \frac{v_2^2}{R} \rightarrow T_2 = m \frac{v_2^2}{R} \rightarrow$$

$$T_2 = 0,2 \frac{4^2}{1} \text{ N} = 3,2 \text{ N}$$

- γ) Η παραπάνω κεντρομόλος καθορίζει και την κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$a_x = a_\kappa = \frac{v_2^2}{R} = \frac{4^2}{1} \text{ m/s}^2 = 16 \text{ m/s}^2.$$

Ενώ το βάρος, προκαλεί μια κατακόρυφη επιτάχυνση, ίση με την επιτάχυνση τη βαρύτητας ( $B=mg$ ),  $a_y=10\text{m/s}^2$ . Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι παραπάνω επιταχύνσεις.

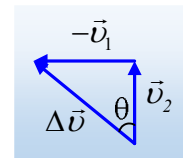


- iv) Για την μεταβολή της ταχύτητας της σφαίρας, μεταξύ των δύο θέσεων, έχουμε:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1) \rightarrow$$

ενώ με βάση και το διπλανό σχήμα, παίρνουμε για το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας:

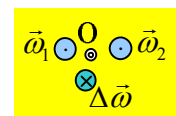
$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} \text{ m/s} = \sqrt{52} \text{ m/s}$$



Ενώ η διεύθυνση της μεταβολής της ταχύτητας, σχηματίζει με την κατακόρυφη διεύθυνση γωνία  $\theta$ , όπου:

$$\varepsilon \varphi \theta = \frac{v_1}{v_2} = \frac{6}{4} = 1,5$$

Αντίθετα το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας, είναι κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, με φορά προς τον αναγνώστη και για τις δύο θέσεις Α και Β. Έτσι η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας, οφείλεται στην μεταβολή μόνο του μέτρου της και είναι ίση:



$$\Delta \vec{\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 \rightarrow \Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{v_2}{R} - \frac{v_1}{R} \rightarrow$$

$$\Delta \omega = \frac{4-6}{1} \text{ rad/s} = -2 \text{ rad/s}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι το διάνυσμα της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας έχει αντίθετη

κατεύθυνση από τα διανύσματα των δύο γωνιακών ταχυτήτων (με φορά προς τα μέσα).

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)